

# Mécanique des Fluides

Franck Nicoud

Polytech Montpellier // IMAG - UMR CNRS 5149

<http://imag.umontpellier.fr/~nicoud/>

[franck.nicoud@umontpellier.fr](mailto:franck.nicoud@umontpellier.fr)

# Plan général

1. Rappels
2. Quelques solutions analytiques
3. Notion de turbulence
4. Interaction fluide-structure

# Objectifs - hypothèses

1. On s'intéresse dans cette partie du cours à la notion de turbulence
2. Il s'agit d'un des phénomènes les plus complexes en mécanique; il n'est pas question ici de faire le tour de la question ...
3. Les phénomènes considérés ne sont pas directement liés à la compressibilité du fluide même si des interactions existent entre turbulence et choc par exemple; dans ce cours introductif à la turbulence, le fluide sera considéré comme incompressible
4. Les forces de volumes sont négligeables

# Turbulence



Turbulence is the most important  
unsolved problem of classical  
physics.

— Richard P. Feynman —

AZ QUOTES

*“ I am an old man now, and when I die and  
go to Heaven there are two matters on which  
I hope enlightenment. One is quantum  
electro-dynamics and the other is turbulence.*

*About the former, I am really rather  
optimistic”*



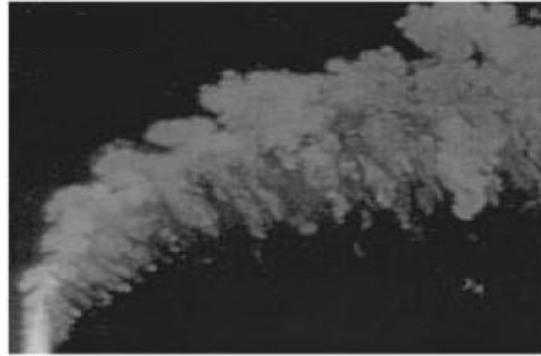
Sir Horace Lamb (1932)

*“ What is turbulence ?  
Turbulence is like pornography.  
It is hard to define,  
but if you see it, you recognize it  
immediately”*

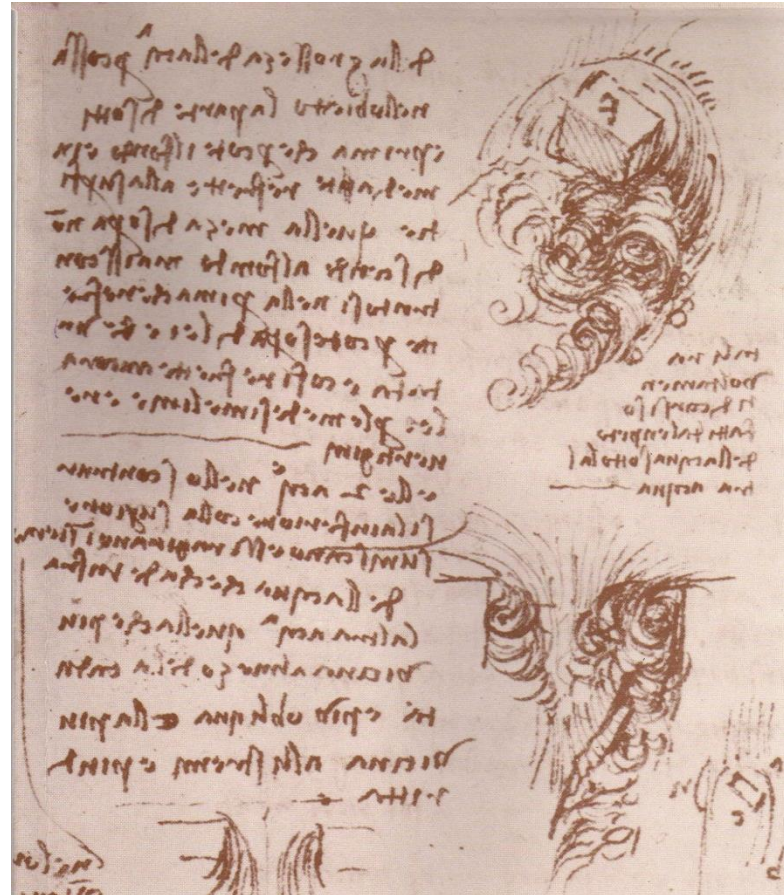
G. K. Vallis, 1999

From S. Goldstein, Ann. Rev. Fluid Mech, 1, 23 (1969)

# Turbulence: elle est partout ...



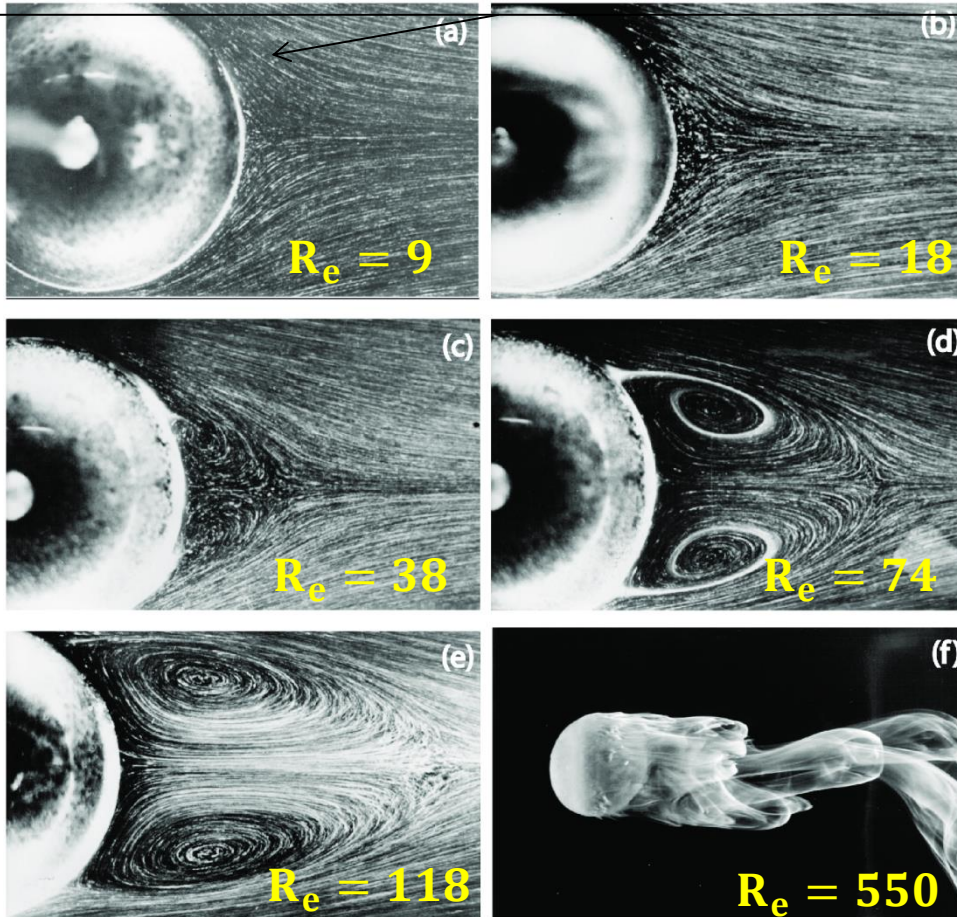
# Turbulence: une longue histoire



Léonard de Vinci

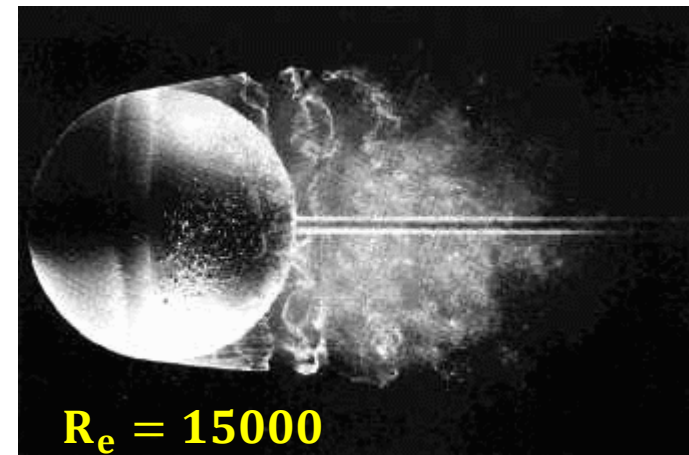
# Turbulence: une histoire de « grand » nombre de Reynolds

Régimes laminaires (pas forcément stationnaires)

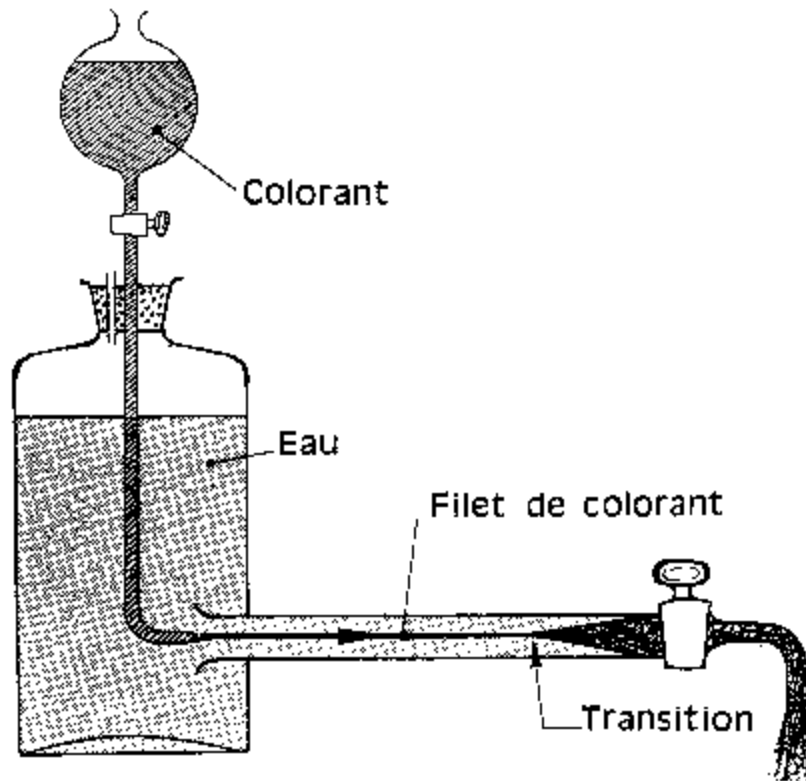


## Ecoulement de sillage derrière une sphère

Régime turbulent



# Expérience de Reynolds - 1883



$$R_e = \frac{U D}{\nu}$$

$U$ : vitesse débitante

$D$ : diamètre de la conduite

$\nu$ : viscosité cinématique



# Régimes laminaire / turbulent

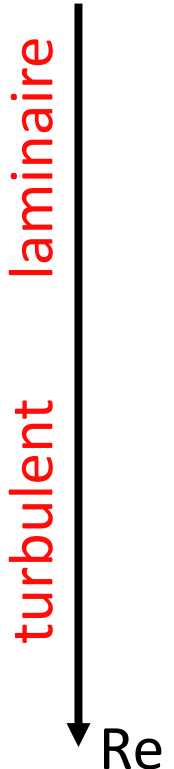
- Le régime de l'écoulement dépend du nombre de Reynolds:



$Re < 2000$



$Re > 3000$



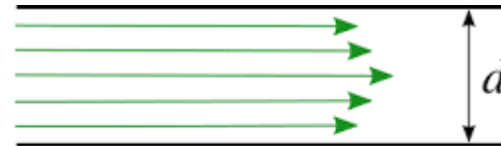
- Plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'écoulement apparaît comme désordonné, avec des « structures » diverses en taille et en forme

# Régimes laminaire / turbulent

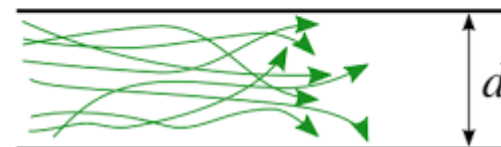
- L'écoulement dans la conduite va de la gauche vers la droite
- Un colorant est injecté à l'amont
- Lorsque le débit augmente, le filet de colorant initialement bien cohérent et rectiligne devient instationnaire puis turbulent



- La solution stationnaire de Poiseuille (profil parabolique) **n'est donc pas représentative de la réalité** lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur critique

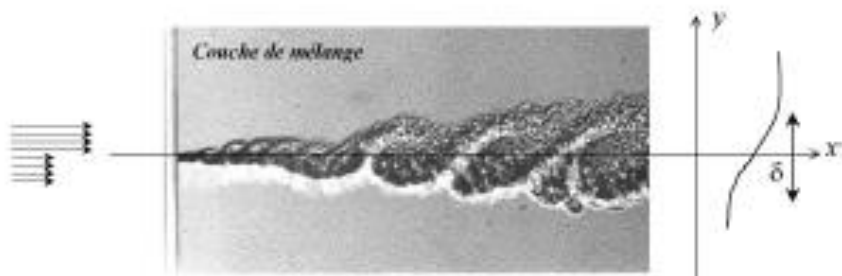
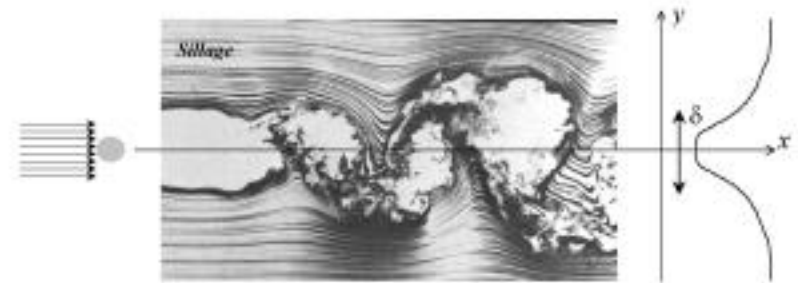


laminaire



turbulent

# Autres configurations de base



# Premières constatations

- Les solutions exactes des équations de Navier-Stokes (Couette, Poiseuille, couche limite, ...) sont **en théorie** valables pour tout nombre de Reynolds
- **En pratique**, ces solutions cessent d'être représentatives de ce que l'on peut observer en pratique au-delà d'une **valeur critique du nombre de Reynolds**
- Cette valeur critique dépend de la configuration, des détails de l'expérience (état de surface, vibrations, ...); il ne faut donc pas la comprendre comme une valeur universelle mais plutôt comme un moyen **d'estimer** le régime probable
- **Ce qui est toujours vrai:**
  - La turbulence est d'autant plus présente que le Reynolds est grand
  - Un écoulement turbulent est 3D, instationnaire et « chaotique »

# Turbulence: un phénomène aléatoire ?

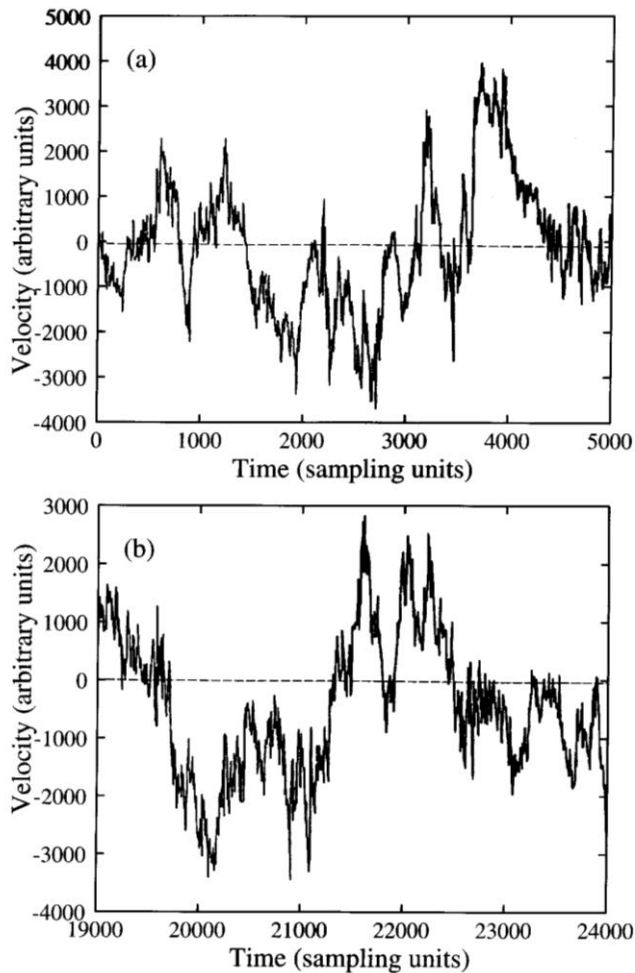


Fig. 3.1. One second of a signal recorded by a hot-wire (sampled at 5 kHz) in the S1 wind tunnel of ONERA (a); same signal, about four seconds later (b). Courtesy Y. Gagne and E. Hopfinger.

Mesures de vitesse  
enregistrées au cours du  
temps dans une conduite

(SOUFFLERIE ONERA)

Les signaux bruts ne sont  
pas reproductibles, mais  
les histogrammes (reliés  
aux statistiques) le sont.

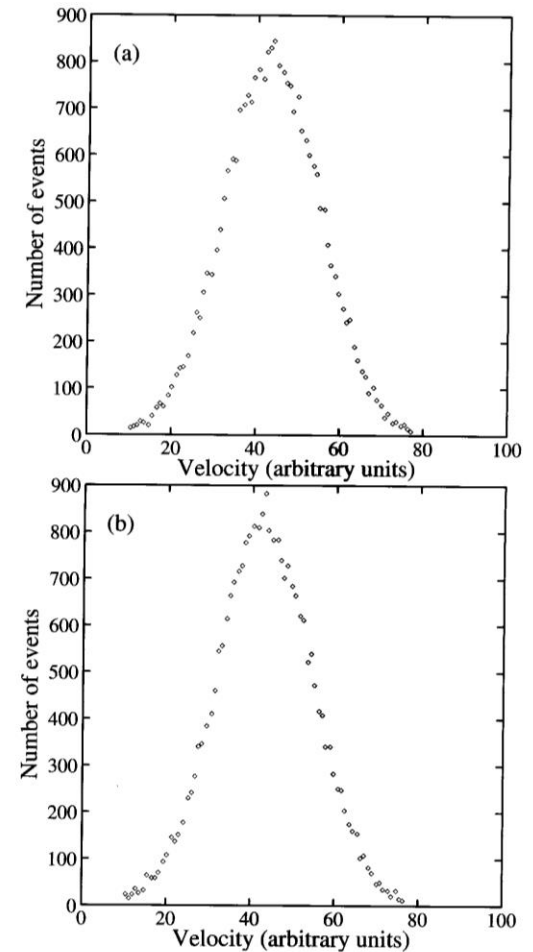


Fig. 3.3. Histogram for same signal as in Fig. 3.1(a), sampled 5000 times over a time-span of 150 seconds (a); same histogram, a few minutes later (b).

# Turbulence: un phénomène aléatoire ?

- L'expérience précédente montre que le signal de vitesse mesuré au même endroit de la même soufflerie n'est pas reproductible. Cela illustre le **caractère chaotique** des écoulements turbulents
- Par contre, la densité de probabilité des signaux de vitesse est elle reproductible, ou **déterministe**. Les signaux sont donc différents mais ils partagent les mêmes moments statistiques (moyenne, variance, ...)

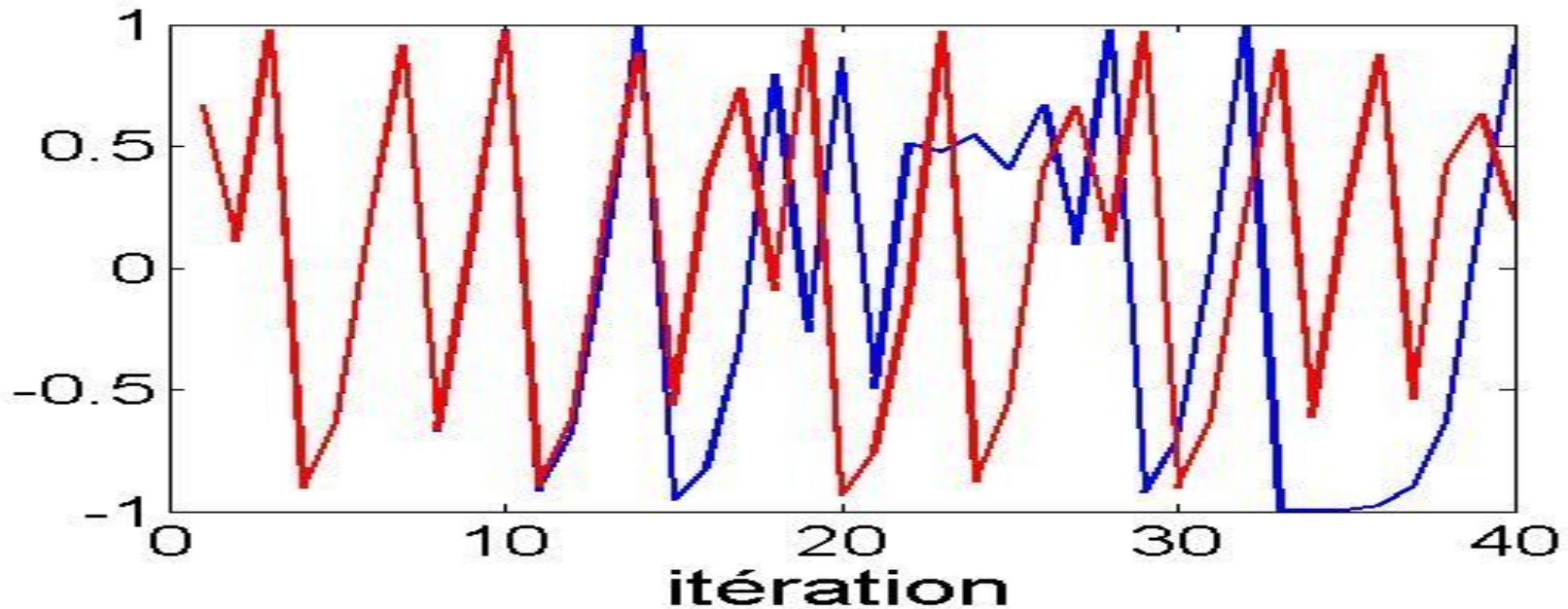
**D'un point de vue ingénieur, l'analyse d'un écoulement turbulent ne peut donc se faire qu'à travers ses **quantités statistiques****

**Comparer deux réalisations n'a pas de sens: elles seront forcément différentes**

# Le système chaotique du pauvre

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2$$

$$x_0 \in [-1, +1]$$



$$x_0 = 0.6667 \quad \text{ou bien} \quad x_0 = 0.66667$$

Ce système non-linéaire est très sensible à la condition initiale; deux conditions initiales très proches peuvent conduire à des solutions très éloignées et non corrélées

# Le système chaotique du pauvre

- Les signaux rouge et bleu sont deux réalisations qui ne sont plus du tout corrélées au bout d'un nombre réduit d'itérations (= au bout d'un temps physique fini)
- Ils correspondent pourtant aux résultats du même calcul déterministe initialisé par deux conditions initiales très proches
- Ce système non-linéaire est très sensible à la condition initiale; **deux conditions initiales très proches peuvent conduire à des solutions très éloignées**
- Les signaux rouges et bleus sont différents MAIS leurs statistiques sont identiques

$\langle x \rangle$	$\langle x^2 \rangle$	$\langle x^3 \rangle$	$\langle x^4 \rangle$
0	0.5	0	0.37
0	0.5	0	0.37



# Opérateur moyenne et statistiques

- Les détails des signaux turbulents étant aléatoires, on ne peut comparer/analyser des écoulements turbulents qu'à travers des grandeurs statistiques
- On introduit pour cela l'opérateur  $\langle \quad \rangle$  ou  $\bar{\quad}$  qui peut représenter
  - Une moyenne d'ensemble (entre N réalisations indépendantes)
  - Une moyenne de phase
  - Une moyenne temporelle (si l'écoulement est statistiquement stationnaire)
  - Une moyenne suivant 1, 2 ou 3 directions d'espace (s'il existe 1, 2 ou 3 directions statistiquement homogènes)
  - Ou toute combinaison des moyennes précédentes

# Turbulence

- Le phénomène de **turbulence est contenu** dans les équations de la mécanique des fluides (Navier-Stokes ou Euler, pas Stokes)
- Ces équations sont **déterministes**, ce qui semble contraire à l'observation d'un écoulement **chaotique**
- **Explication**: lorsque le nombre de Reynolds est assez grand (= la diffusion est assez faible), l'écoulement est très sensible aux conditions limites et initiales. Des **variations infinitésimales** conduisent, sur la durée de l'expérience, à **des variations importantes de la vitesse du fluide**
- Cette sensibilité, déjà observée dans le système chaotique « du pauvre », est liée **aux termes non linéaires**, donc à la **convection**
- La **turbulence** n'est donc pas présente dans les situations d'écoulement rampant (équation de Stokes linéaire) et ne peut apparaître que lorsque la non-linéarité est assez importante (**Reynolds assez grand**)

# Structures tourbillonnaires

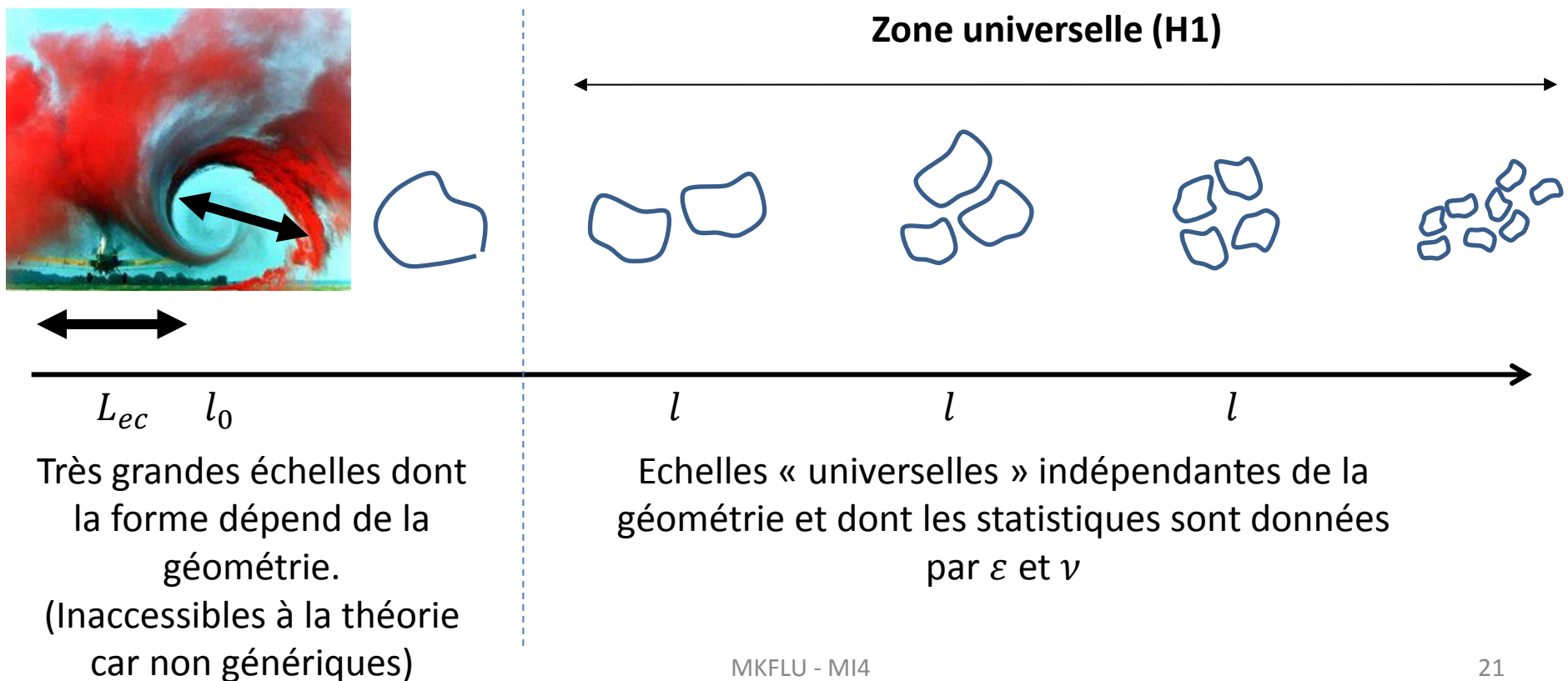
- On considère un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds et caractérisé par les échelles caractéristiques  $U_{ec}$  et  $L_{ec}$
- Cet écoulement est constitué de « **tourbillons** » (ou d'« **échelles de fluctuations** », ou de « **structures** ») (eddies en anglais) de tailles diverses. Les « structures » de **taille  $l$**  ont une vitesse caractéristique  **$u(l)$**
- La notion de « tourbillon » reste ici volontairement floue. Il s'agit d'une fluctuation présente sur un domaine de taille caractéristique  $l$  et qui reste cohérente pendant une durée au moins égale au temps de retournement  $l/u$
- Les plus grandes « échelles » ont pour taille  $l_0$  et vitesse caractéristique  $u(l_0)$  et elles sont telles que  $R_0 = \frac{u(l_0) l_0}{\nu} \gg 1$

# Cascade d'énergie (Richardson 1922)

- Une idée de base pour la description/compréhension des écoulements turbulents est que **les grosses structures sont instables et se disloquent** pour former des structures de taille inférieure:  $u(l_0), l_0 \rightarrow u(l), l$
- Ce processus de nature non-visqueuse (le nombre de Reynolds est grand) n'est associé à aucune dissipation visqueuse et revient à **transférer de l'énergie cinétique** des grosses structures vers des structures de taille inférieure.
- Ce processus se poursuit tant que le nombre de Reynolds des structures générées est suffisamment grand:  $R_l = \frac{u(l)l}{\nu} \gg 1$
- Ce processus s'arrête lorsque le nombre de Reynolds des structures créées est suffisamment réduit pour que les fluctuations soient stabilisées/dissipées

# Hypothèses de Kolmogorov (1941)

- **H1**: A grand nombre de Reynolds, **les statistiques des fluctuations** à petites échelles (= suffisamment indépendantes des conditions aux limites) ne dépendent que de  $\varepsilon$  (la dissipation) et  $\nu$  (la viscosité cinématique)



# Echelles de Kolmogorov

- Les **plus petites échelles** présentes dans un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds sont appelées **échelles de Kolmogorov ou dissipatives**
- Leurs taille et vitesse caractéristiques vérifient:
  - $l_\eta = l_\eta(\varepsilon, \nu)$       et       $u_\eta = u_\eta(\varepsilon, \nu)$
  - $R_\eta = \frac{u_\eta l_\eta}{\nu} \sim 1$
- On obtient alors par simple analyse dimensionnelle:

$$l_\eta \sim \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \quad \text{et} \quad u_\eta \sim \nu^{1/4} \varepsilon^{1/4}$$

- Le temps caractéristique des échelles dissipatives est alors  $\tau_\eta = \frac{l_\eta}{u_\eta} \sim \frac{\nu^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}$

# Dissipation

- La dissipation par effet visqueux n'apparaît qu'en fin de cascade. Le **taux de dissipation** (en J/kg/s, notée  $\varepsilon$ ) est donc imposé par les grandes structures (puisque la cascade énergétique se fait à grand nombre de Reynolds).
- Le taux de dissipation (souvent abrégé par « la dissipation ») est donc lié au rapport entre l'énergie disponible dans les grandes structures ( $u_0^2$ ) et le temps caractéristique de celles-ci ( $l_0/u_0$ ):

$$\varepsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}$$

- La **dissipation** dans un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds est donc **indépendante** de la viscosité du fluide !!

# Variété d'échelles

- La complexité d'un écoulement turbulent est directement liée à la variété des échelles de longueur, vitesse et temps qu'il contient
- A partir de  $\varepsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}$  et des échelles de Kolmogorov, on obtient

$$\frac{l_\eta}{l_0} \sim R_0^{-3/4}$$

$$\frac{u_\eta}{u_0} \sim R_0^{-1/4}$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_0} \sim R_0^{-1/2}$$

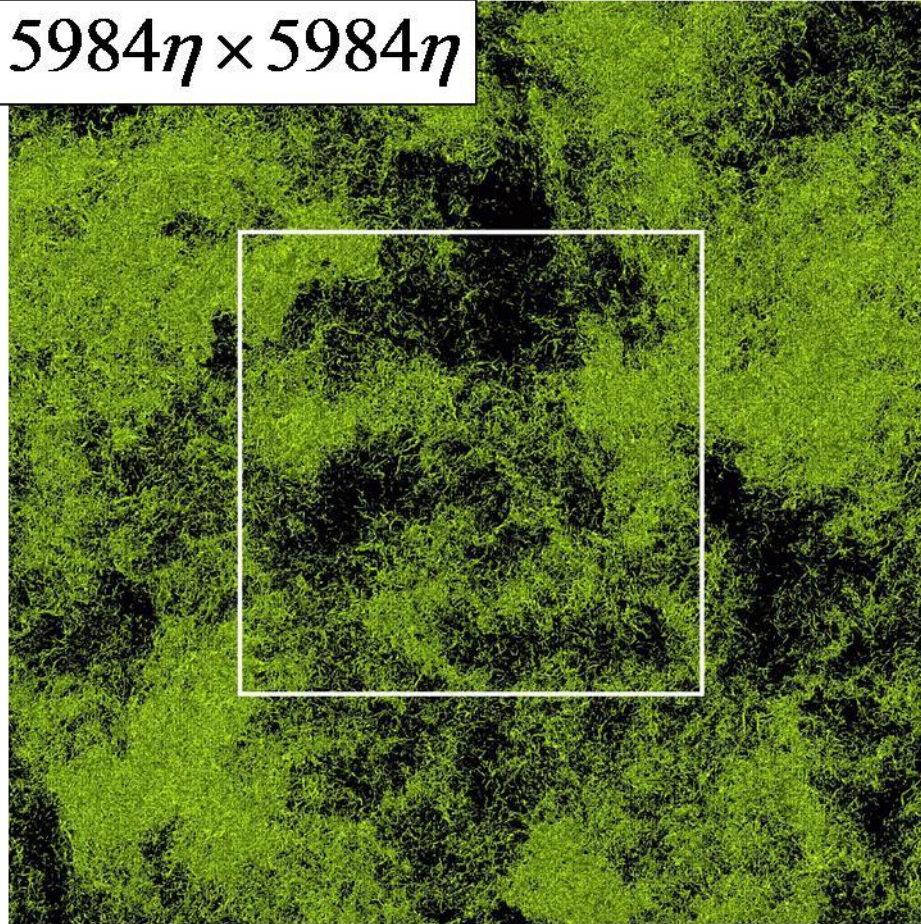
On rappelle que  $R_0 = \frac{u_0 l_0}{\nu} \gg 1$

- Pour  $R_0$  suffisamment grand, il existe une gamme d'échelles telles que  $l_\eta \ll l \ll l_0$  ; ces échelles sont potentiellement telles que  $\frac{u(l) l}{\nu} \gg 1$



# Variété des échelles

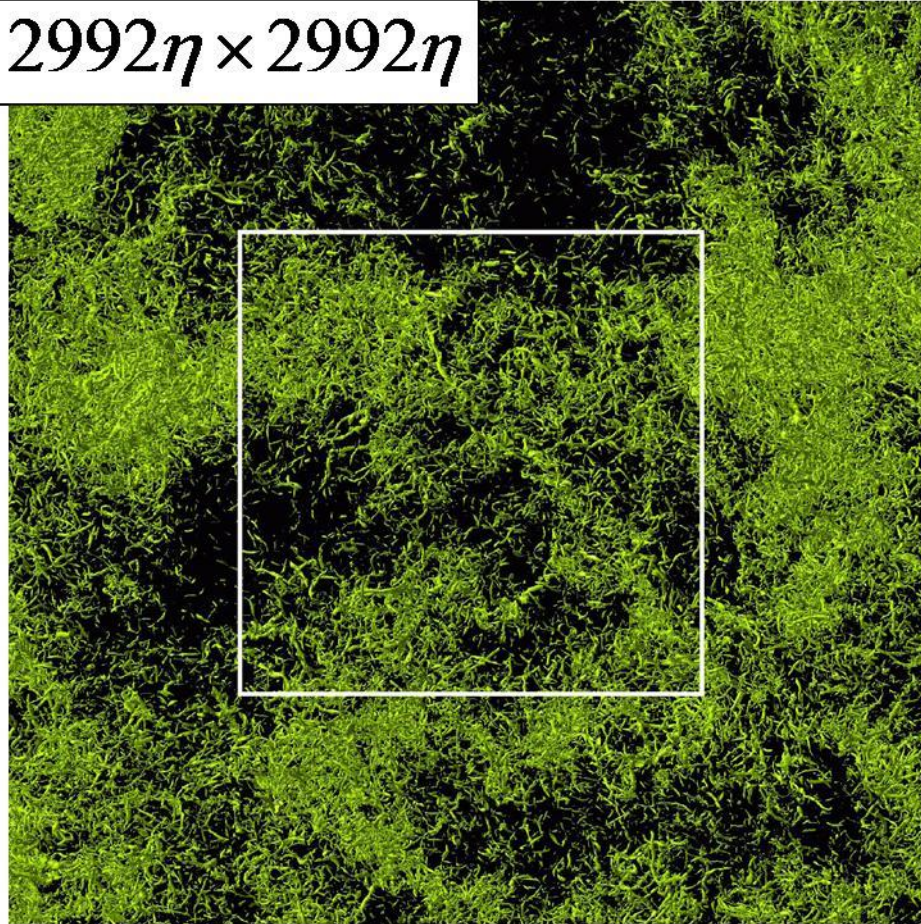
$5984\eta \times 5984\eta$



Yokokawa et al. – Earth Simulator Center

# Variété des échelles

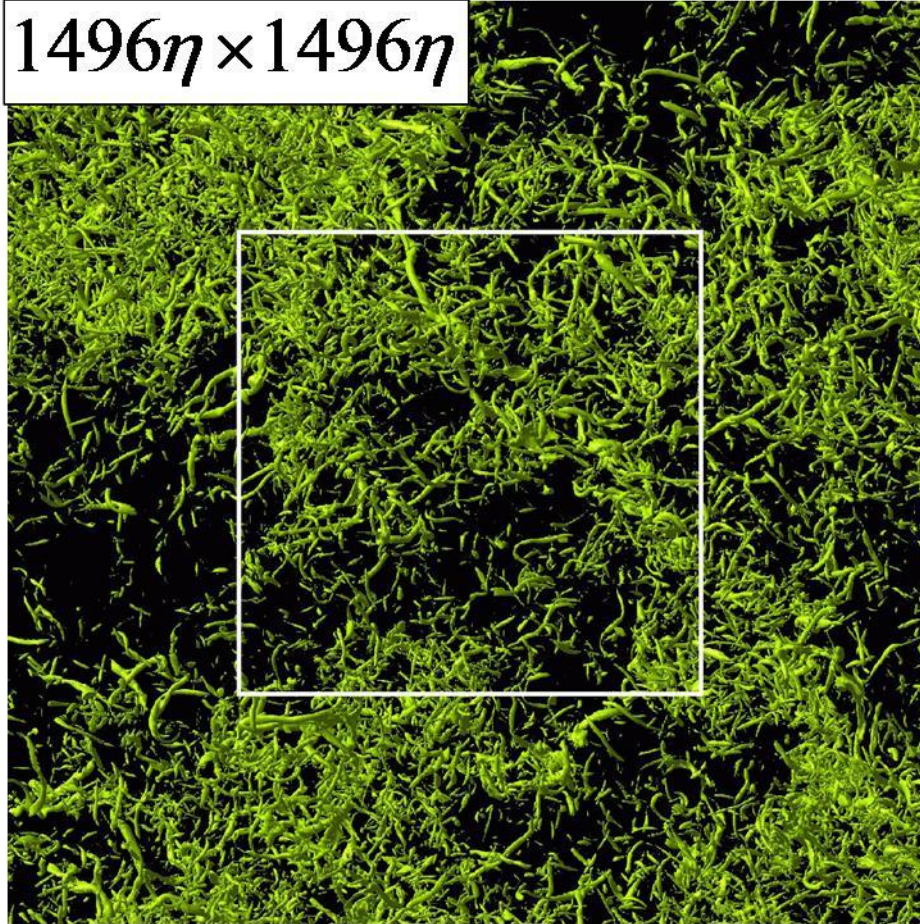
$2992\eta \times 2992\eta$



Yokokawa et al. – Earth Simulator Center

# Variété des échelles

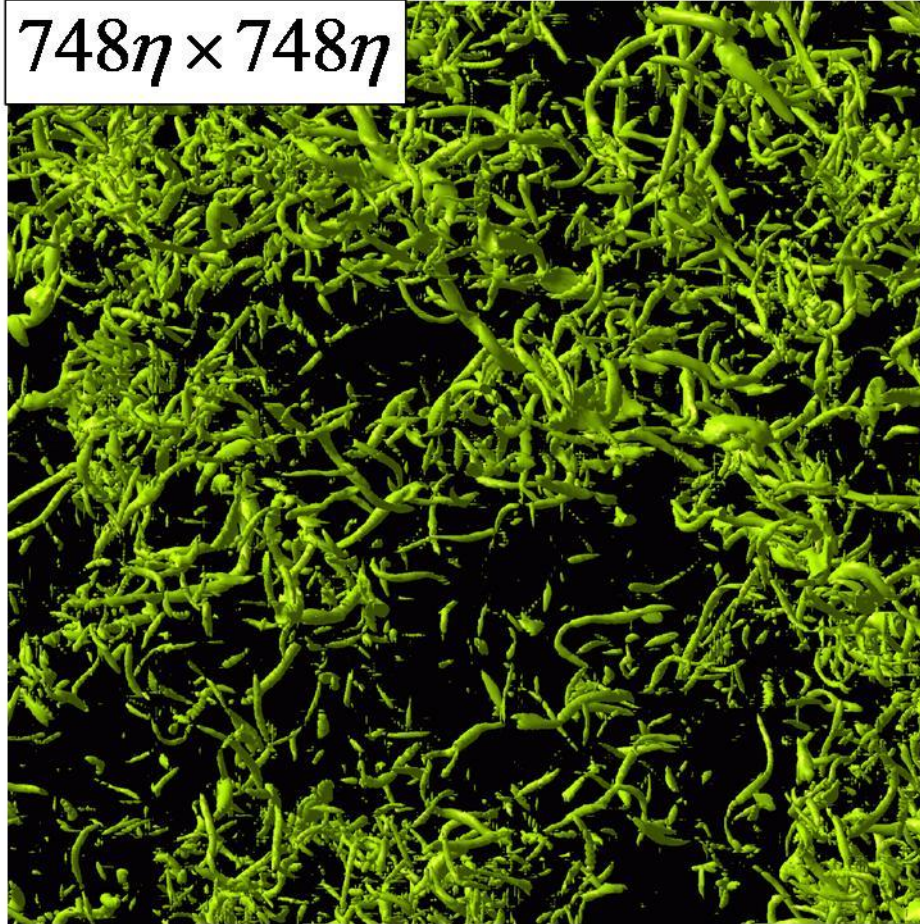
$1496\eta \times 1496\eta$



Yokokawa et al. – Earth Simulator Center

# Variété des échelles

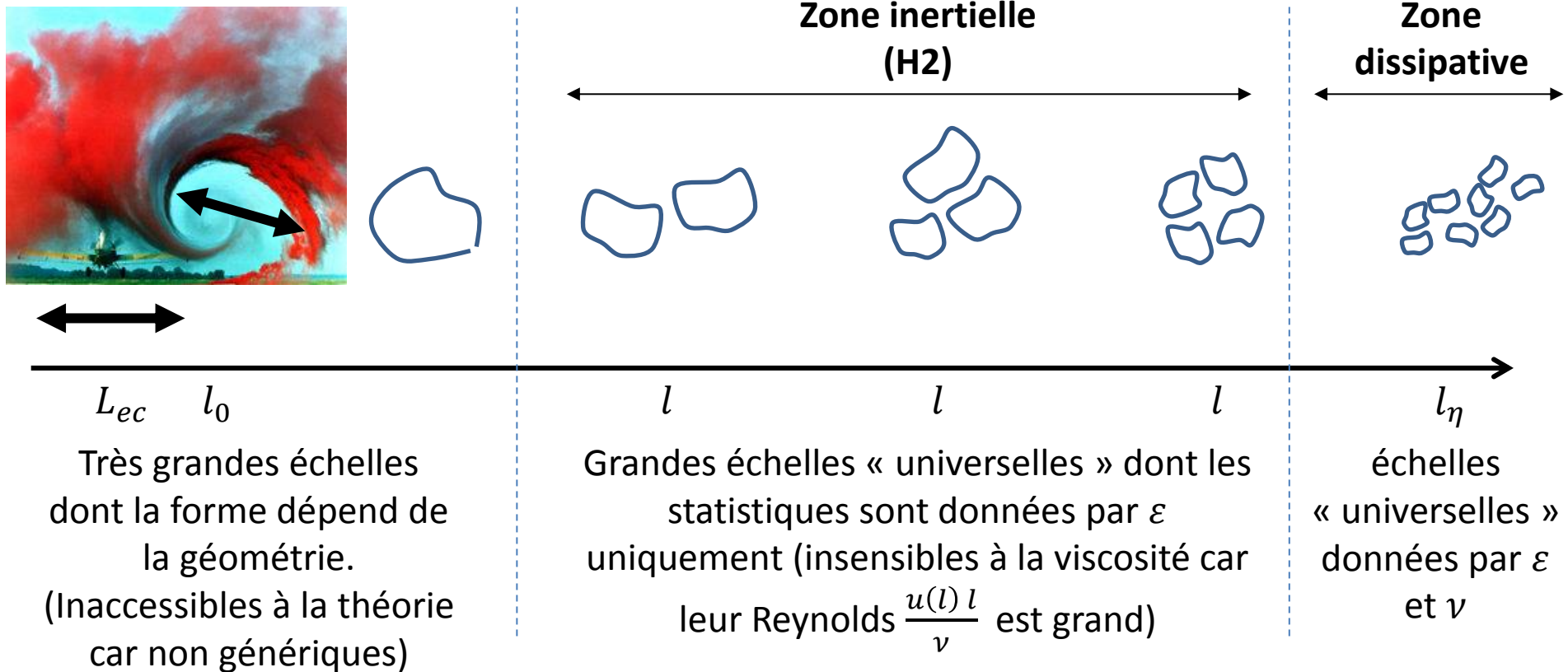
$748\eta \times 748\eta$



Yokokawa et al. – Earth Simulator Center

# Hypothèses de Kolmogorov (1941)

- **H2**: A grand nombre de Reynolds, les statistiques des **fluctuations** à petites échelles telles que  $\frac{u(l) l}{\nu} \gg 1$  **ne dépendent que de  $\varepsilon$  (la dissipation)**.



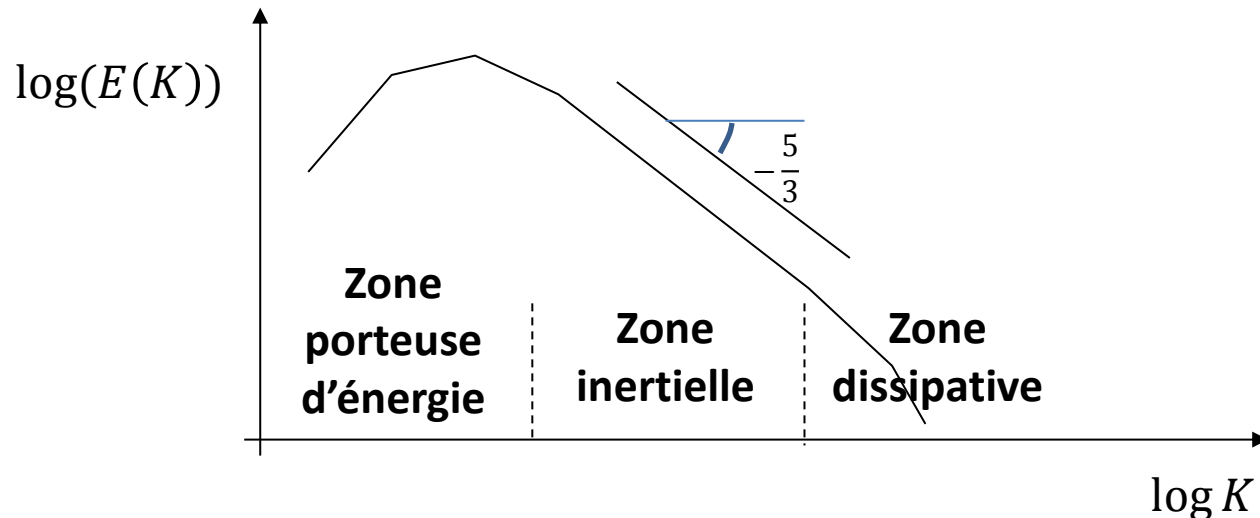
# SPECTRE DE TURBULENCE

- $\kappa$  nombre d'onde :  $K = 2\pi/l$  où  $l$  est la longueur d'onde d'une fluctuation
- On introduit la quantité  **$E(K)$ , le spectre de turbulence**, telle que  $E(K)dK$  est l'énergie cinétique contenue dans les échelles (fluctuations) dont le nombre d'onde est entre  $K$  et  $K + dK$
- L'énergie cinétique massique des fluctuations turbulentes, souvent notée  $k = \frac{1}{2} u_i u_i$ , est l'intégrale du spectre de turbulence

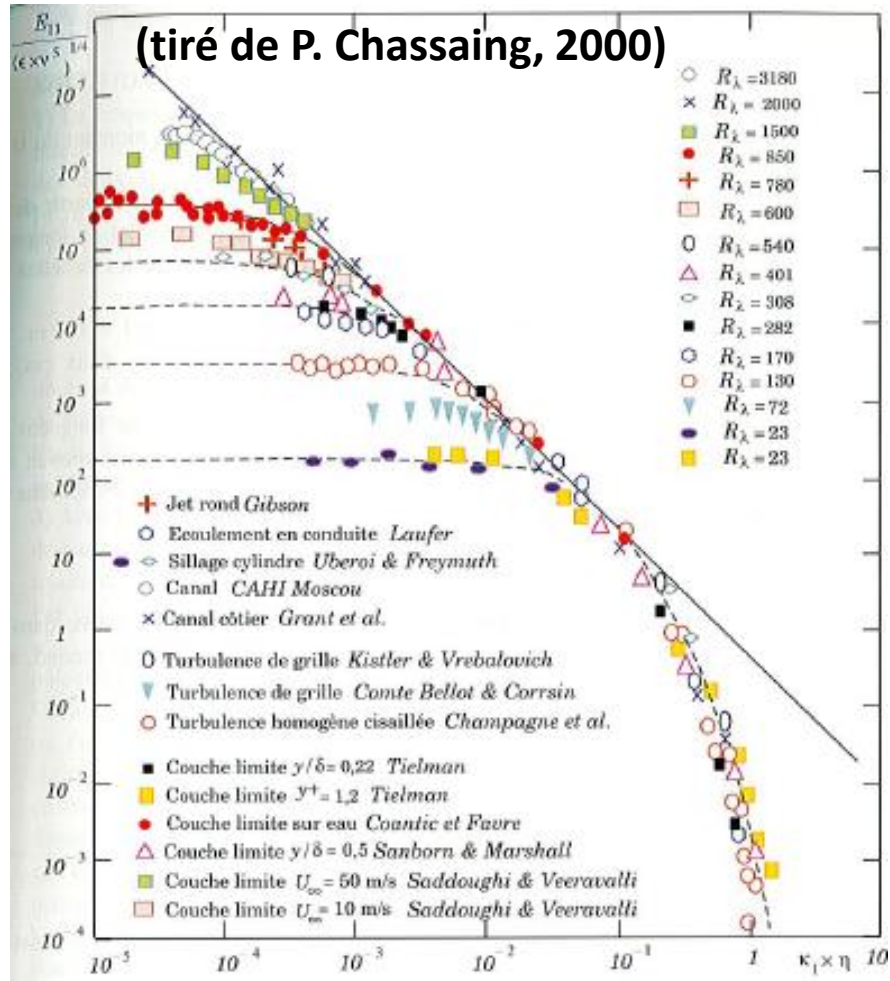
$$\int_{K=0}^{\infty} E(K) dK = k$$

# Spectre en $-5/3$

- Dans la **zone inertielle**, les fluctuations sont complètement déterminées statistiquement par leur taille  $l$  et la dissipation  $\varepsilon$
- Dans cette zone,  $E(K)$  ne dépend donc que de  $l$  (ou alternativement de  $K = 2\pi/l$ ) et de  $\varepsilon$
- Par analyse dimensionnelle on obtient alors  $E(K) = C_K \varepsilon^{2/3} K^{-5/3}$



# Spectre en -5/3



$$E(K) \sim \varepsilon^{2/3} K^{-5/3}$$

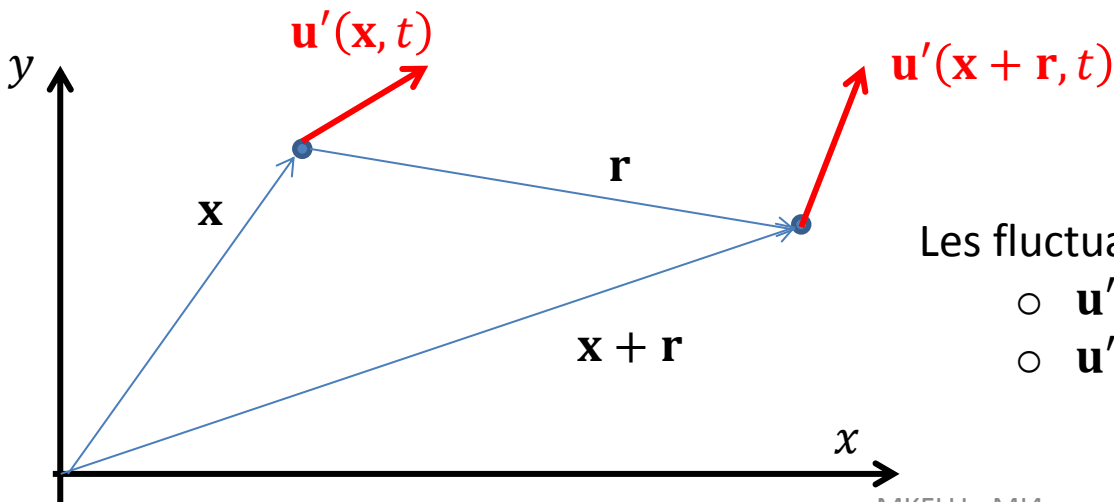
- Données expérimentales dans diverses situations d'écoulement regroupées par Chapman (Spectres adimensionnés par les échelles de Kolmogorov)
- Lorsque le Reynolds est assez grand et qu'une zone inertielle existe, les données confirment la décroissance du spectre en  $\kappa^{-5/3}$
- Ce bon accord avec la théorie de Kolmogorov, obtenu pour une grande variété d'écoulements, valide le scénario présenté autour de la cascade d'énergie des plus grandes aux plus petites échelles



# Corrélations en 2 points

- Les statistiques en 1 point ne sont pas suffisantes pour décrire la structure d'un écoulement turbulent et mesurer par exemple les tailles caractéristiques des fluctuations
- On introduit pour cela les corrélations en 2 points qui s'écrivent, en situation de turbulence **homogène** (indépendance par rapport à la position  $\mathbf{x}$ ) :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u'_j(\mathbf{x}, t) \rangle$$



Les fluctuations sont définies par:

- $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle$
- $\mathbf{u}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$

# Corrélations en 2 points

- En situation de turbulence homogène **isotrope** (indépendance par rapport à la direction  $\mathbf{r}$ ), seule la distance  $r = |\mathbf{r}|$  entre les deux points compte. On montre alors que la corrélation peut s'écrire sous la forme:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u'^2 \rangle \left[ g(r, t) \delta_{ij} + (f(r, t) - g(r, t)) \frac{r_i r_j}{r^2} \right]$$

- **En situation isotrope**, les composantes des vitesses **sont toutes équivalentes**

et donc  $\langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle$  d'où  $k(t) = \frac{1}{2} \langle u_i'^2 u_j'^2 \rangle = \frac{3}{2} \langle u'^2 \rangle$

- Lorsque les deux points sont confondus ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ), on obtient:

$$R_{ij}(\mathbf{0}, t) = \langle u'_i u'_j \rangle$$

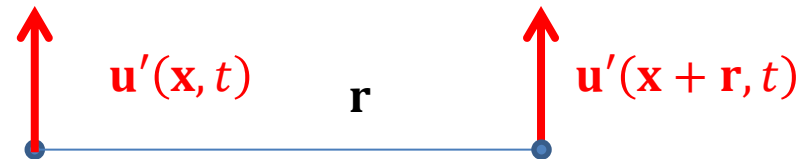
# Fonctions d'auto-corrélation

- Les fonctions  $f(r, t)$  et  $g(r, t)$  sont les fonctions longitudinale et transversale d'auto-corrélation
- En effet, si on choisit par exemple  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_1$ , on obtient:

$$R_{11}(r\mathbf{e}_1, t) = \langle u'^2 \rangle f(r, t), \text{ c'est-à-dire } f(r, t) = \frac{\langle u'(x+r, t)u'(x, t) \rangle}{\langle u'^2(x, t) \rangle}$$



$$R_{22}(r\mathbf{e}_1, t) = \langle v'^2 \rangle g(r, t), \text{ c'est-à-dire } g(r, t) = \frac{\langle v'(x+r, t)v'(x, t) \rangle}{\langle v'^2(x, t) \rangle}$$

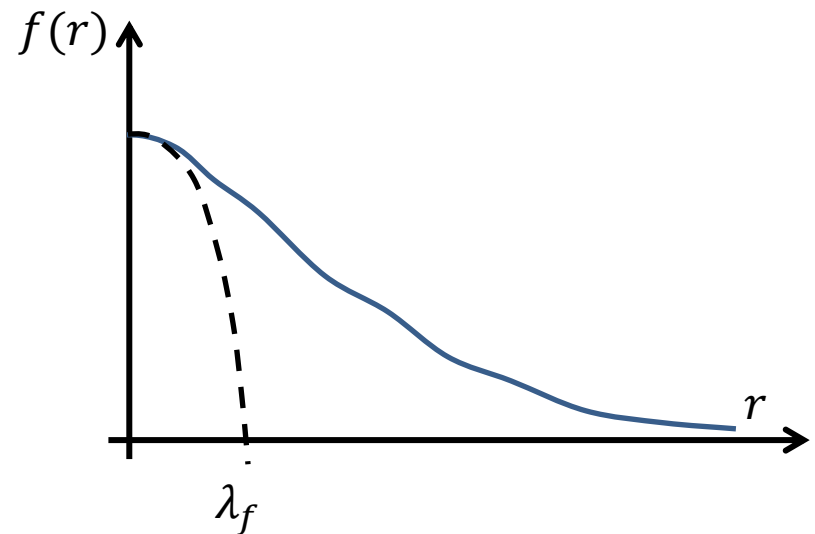
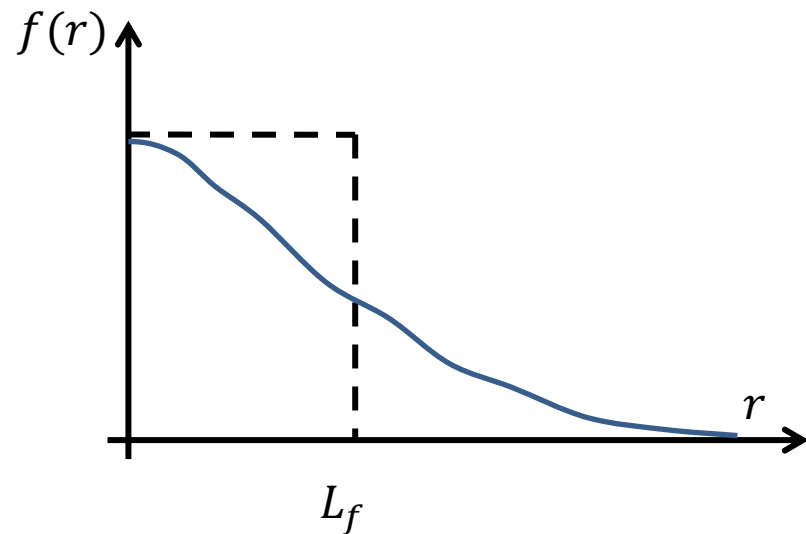


# Fonctions d'auto-corrélation

- $f(r, t)$  et  $g(r, t)$  valent 1 en  $r = 0$  par construction puisqu'elles sont adimensionnées par la corrélation en 1 point
- Elles tendent vers 0 en  $r \rightarrow \infty$  ; en effet, la connaissance de la vitesse en un point ne donne aucune indication sur la vitesse en un autre point très éloigné
- En situation de fluide incompressible, on montre par ailleurs que
  - $\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} = 0$ , d'où l'on déduit que
  - $g(r, t) = f(r, t) + \frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r}(r, t)$  - Relation de Karman-Howarth
- Au final, la connaissance de la **fonction d'auto-corrélation longitudinale** suffit, en **turbulence homogène isotrope**, à caractériser totalement  $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$

# Echelles caractéristiques

- La fonction  $f(r, t)$  permet de définir deux échelles caractéristiques:
  - **Echelle intégrale** longitudinale :  $L_f = \int_{r=0}^{\infty} f(r, t) dr$ , caractéristique des plus grandes échelles en turbulence homogène isotrope
  - **Micro-échelle de Taylor**:  $\lambda_f = \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} (0, t) \right)^{-1/2}$ ,



# Echelles caractéristiques

- A partir des expressions obtenues pour  $R_{11}(r\mathbf{e}_1, t)$  et  $R_{22}(r\mathbf{e}_1, t)$  on montre

$$\text{que } \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \frac{2\langle u'^2 \rangle}{\lambda_f^2}$$

- La micro-échelle de Taylor permet alors de caractériser les échelles dissipatives

puisque l'on montre que  $\varepsilon = 15\nu \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = 30\nu \frac{\langle u'^2 \rangle}{\lambda_f^2}$

- On construit de manière similaire en utilisant  $g(r, t)$  les longueurs transversales

$L_g$  et  $\lambda_g$  dont on peut montrer qu'elles vérifient, en situation de turbulence

homogène isotrope:  $L_g = L_f/2$  et  $\lambda_g = \lambda_f/\sqrt{2}$

# Echelles caractéristiques

- Toujours en situation de turbulence homogène isotrope, on introduit  $R_L = \frac{\sqrt{k} L_f}{\nu}$

le nombre de Reynolds caractéristique des plus grandes échelles. Puisque

$$\varepsilon \sim \frac{k^{3/2}}{L_f}, \text{ ce nombre de Reynolds est aussi } R_L \sim \frac{k^2}{\varepsilon \nu}$$

- On montre alors que  $\frac{\lambda_f}{L_f} \sim \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{R_L}}$
- Puisque l'échelle de Kolmogorov est telle que  $\frac{L_\eta}{L_f} \sim \frac{1}{R_L^{3/4}}$ , on en déduit que la

micro-échelle de Taylor est un intermédiaire entre les grandes échelles et les

échelles dissipatives et que:  $\lambda_f \sim \sqrt{20} L_f^{1/3} L_\eta^{2/3}$

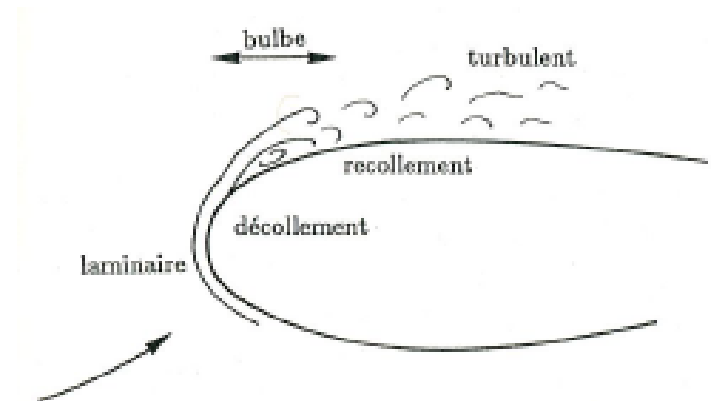
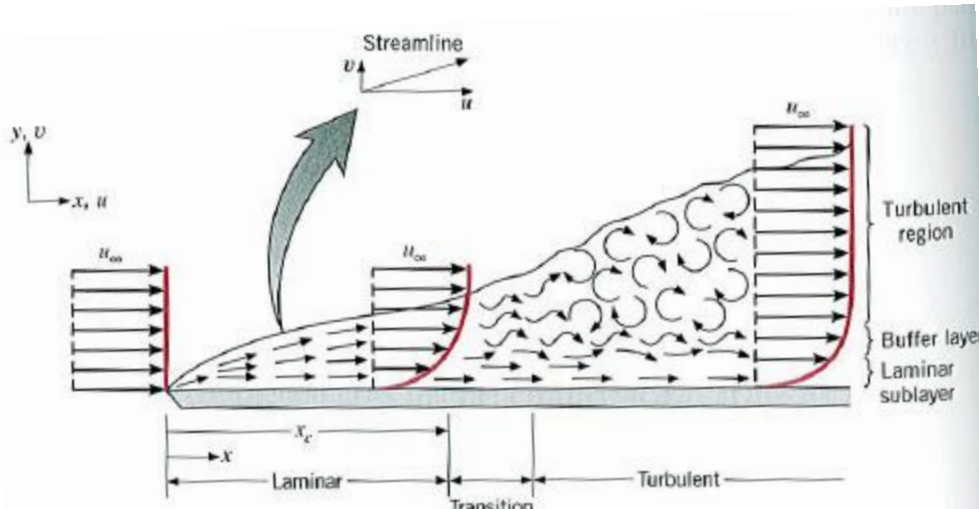
# D'un Reynolds à l'autre ...

- Le nombre de Reynolds  $R_L$  est aussi appelé **Reynolds turbulent**  $R_t = \frac{\sqrt{k} L_f}{\nu}$
- A partir des estimations précédentes, on déduit que le nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor  $\lambda_f$ ,  $R_\lambda = \frac{\sqrt{\langle u'^2 \rangle} \lambda_f}{\nu}$ , vérifie  $R_\lambda = \sqrt{\frac{40}{3}} R_L \approx 3.7 \sqrt{R_t}$
- Le nombre de Reynolds de l'écoulement est basé lui sur les échelles caractéristiques  $U_{ec}$  et  $L_{ec}$ :  $R_{ec} = \frac{U_{ec} L_{ec}}{\nu}$ . Une estimation grossière est  $\sqrt{k} \approx 0.2 U_{ec}$  et  $L_f \approx 0.5 L_{ec}$ , ce qui conduit à  $R_t \approx R_{ec}/10$
- En pratique, en affinant les constantes de proportionnalité à partir de données expérimentales ( $L_f \approx 0.4 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ ), on obtient l'estimation:  $R_\lambda \approx 2 \sqrt{R_{ec}}$
- **Au final:**  $R_\eta = \frac{u_\eta l_\eta}{\nu} \sim 1 < R_\lambda \approx 2 \sqrt{R_{ec}} < R_t \approx \frac{R_{ec}}{10} < R_{ec} = \frac{U_{ec} L_{ec}}{\nu}$



# ÉCOULEMENTS TURBULENTS PARIÉTAUX

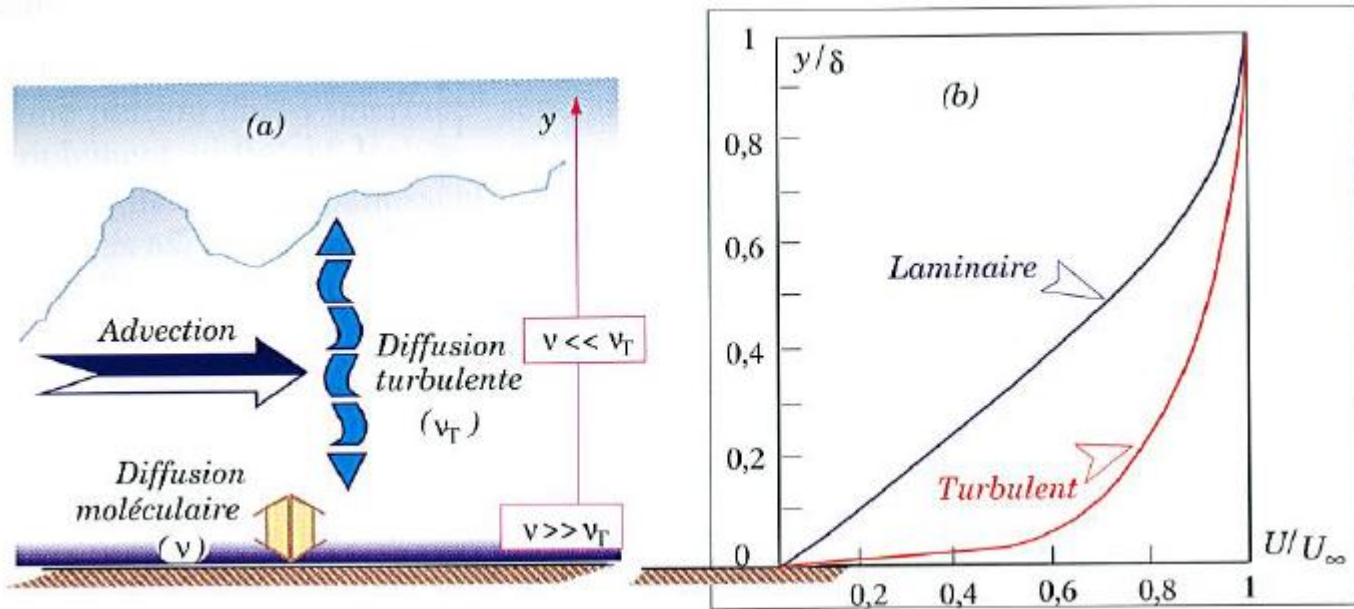
# Couche limite turbulente



(tiré de P. Chassaing, 2000)

- La solution analytique de type **Blasius** est valable uniquement pour des écoulements **laminaires stationnaires**
- Par construction, le nombre de **Reynolds  $R_x$**  basé sur la distance parcourue depuis le début de la couche limite **augmente** lorsque l'on s'éloigne du bord d'attaque
- Une **couche limite** finit donc en général par devenir **turbulente**

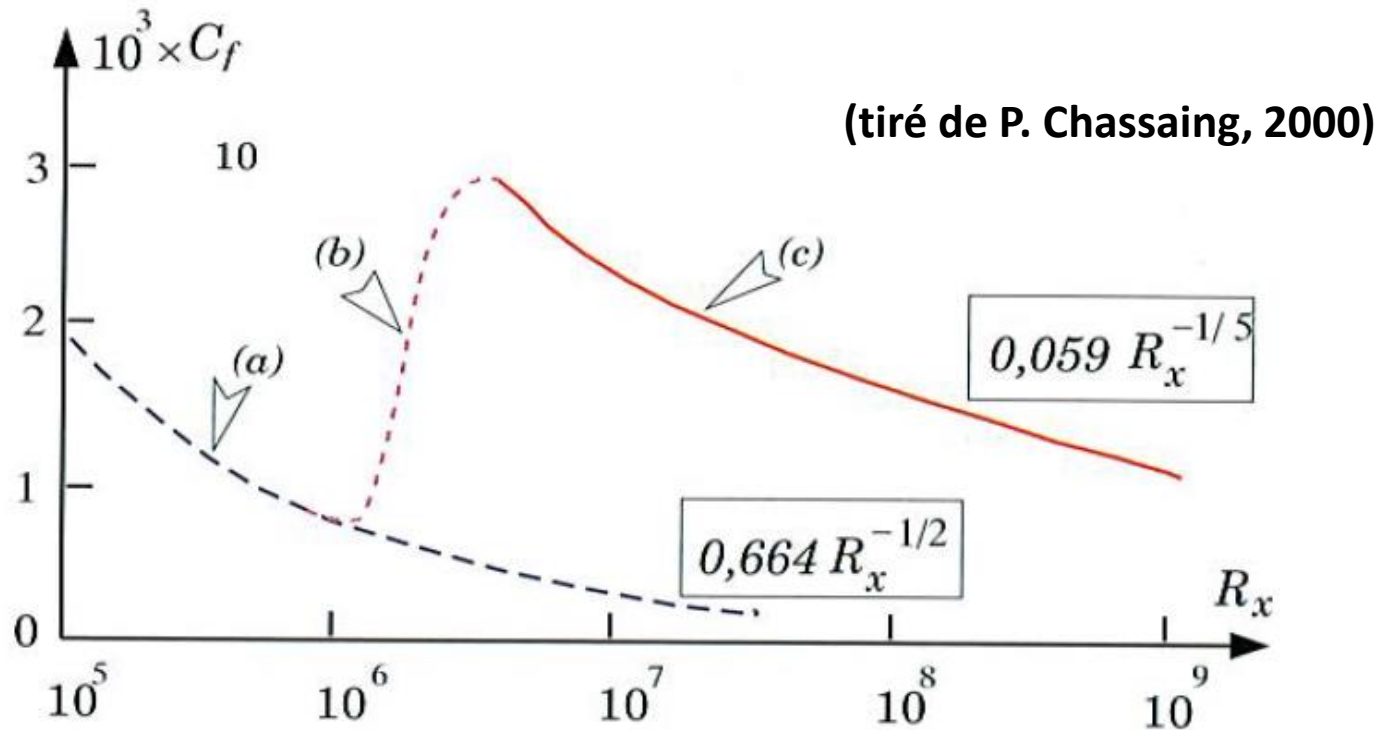
# Couche limite turbulente



(tiré de P. Chassaing, 2000)

- Un effet majeur de la turbulence est d'augmenter la diffusion effective de la qdm dans la direction normale à la paroi
- Cela a pour conséquence de rendre les **profils de vitesse plus « remplis »**

# Couche limite turbulente



- Un effet majeur de la turbulence est d'augmenter la diffusion effective de la qdm dans la direction normale à la paroi
- Cela a pour conséquence de rendre les **profils de vitesse plus « remplis »**
- ... et également **d'augmenter le coefficient de frottement**

# Grandeurs intégrales

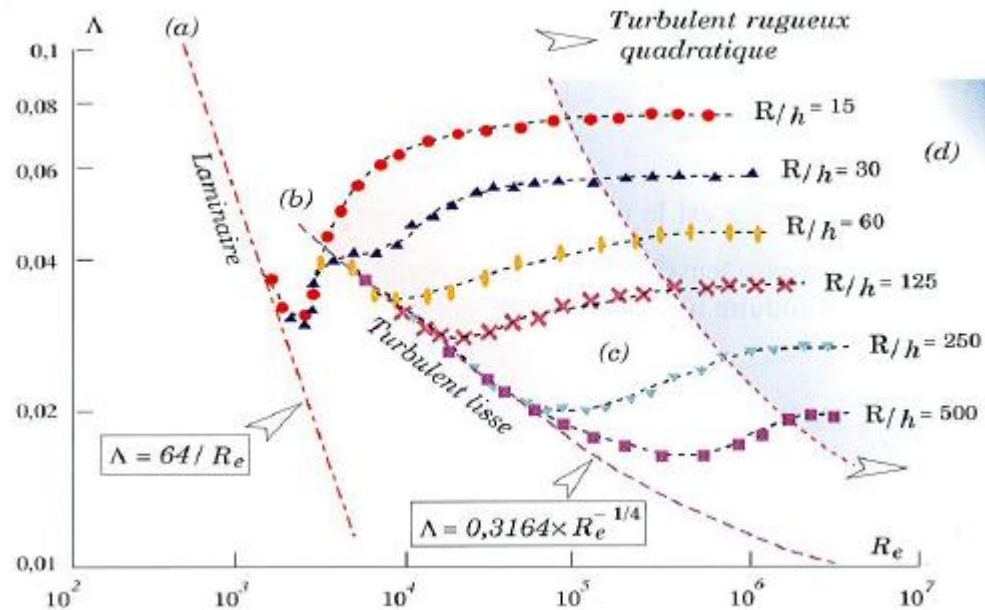
Nom	Turbulent	Solution de Blasius
Coefficient de frottement	$C_f \approx 0.059 R_x^{-1/5}$	$C_f \approx 0.66 \frac{1}{\sqrt{R_x}}$
Epaisseur de couche limite	$\frac{\delta(x)}{x} \approx 0.37 R_x^{-1/5}$	$\frac{\delta(x)}{x} \approx 4.9 R_x^{-1/2}$
Epaisseur de déplacement	$\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} \approx 0.125$	$\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} \approx 0.347$
Epaisseur de quantité de mouvement	$\frac{\theta(x)}{\delta(x)} \approx 0.097$	$\frac{\theta(x)}{\delta(x)} \approx 0.134$
Facteur de forme	$H = \frac{\delta^*}{\theta} \approx 1.29$	$H \approx 2.6$

- Valeurs correspondant à une couche limite sur paroi lisse turbulente dès le bord d'attaque
- $C_f \approx 0.003$  pour  $R_x \approx 5 \times 10^6$

# Pertes de charge en conduite

- L'augmentation de la diffusion effective de la qdm dans la direction normale à la paroi a pour conséquence **d'augmenter les pertes de charge dans les conduites**
- Celles-ci sont représentées par le **coefficient de perte de charge** qui est en fait un gradient de pression sans dimension:  $\Lambda = -2R \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{1}{2}\rho u_{moy}^2}$
- En régime **laminaire**, ce coefficient vaut  $\Lambda = \frac{64}{Re}$  avec  $Re = \frac{\rho u_{moy} 2R}{\mu}$
- En régime **turbulent**, des **corrélations** issues des données expérimentales sont souvent utilisées lorsque la paroi est lisse (ou faiblement rugueuse):
  - Loi de Blasius:  $\Lambda = 0.3164 \times Re^{-1/4}$  ATTENTION: pas la **solution** de Blasius !!
  - Loi de Prandtl:  $\Lambda \times (2\log(Re\sqrt{\Lambda}) - 0.8)^2 = 1$
- Lorsque la conduite a une rugosité de hauteur caractéristique  $h$  et que le nombre de Reynolds est suffisamment grand, la loi du **régime turbulent rugueux** quadratique donne  $\Lambda \times (2\log(R/h) + 1.74)^2 = 1$

# Pertes de charge en conduite



(tiré de P. Chassaing, 2000)

- En régime **turbulent rugueux**, le coefficient de perte de charge ne dépend pas du nombre de Reynolds
- En régime **turbulent** (lisse), le coefficient de perte de charge est largement plus **important** qu'en laminaire (facteur 4 pour Reynolds de qqs 1000)

# Ecoulement turbulent pariétal

- Plusieurs zones distinctes sont présentes dans une couche limite turbulente d'épaisseur  $\delta$  et de vitesse extérieure  $U_E$ :

- **Zone interne:**

- la présence de la paroi se fait fortement sentir sur l'organisation de l'écoulement
- le profil de vitesse s'exprime en variables internes :

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau} ; y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \text{ où } u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho} \text{ est la vitesse de friction}$$

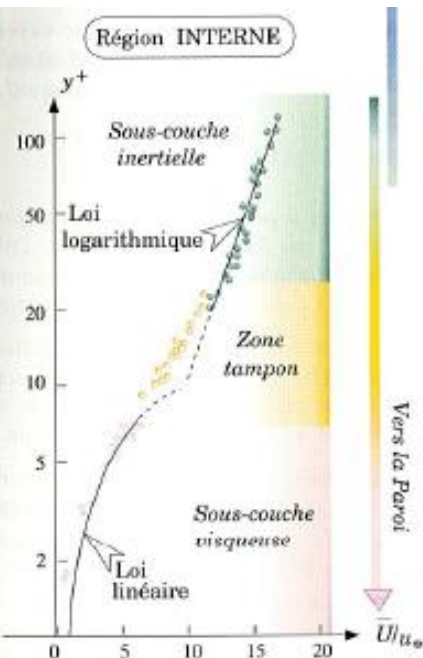
- La zone interne a une épaisseur qui correspond à  $y^+ = O(100)$

- **Zone externe ( $y > 0.01\delta$ ):**

- les effets de la paroi deviennent moins forts
- le profil de vitesse moyenne s'exprime en variables externes



# Ecoulement turbulent pariétal

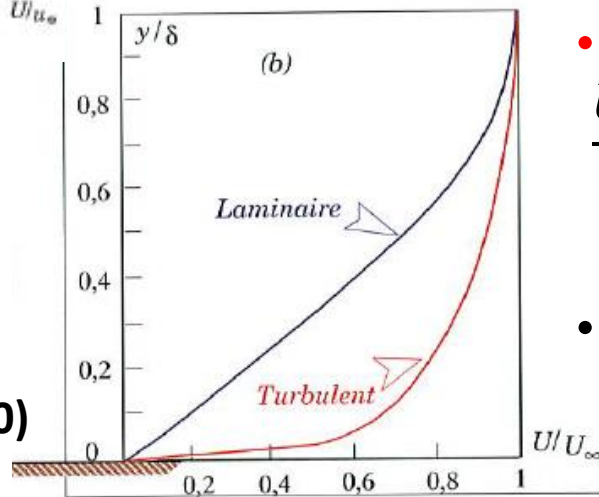


- La zone interne contient elle-même plusieurs zones:
  - Sous-couche visqueuse  
 $y^+ \lesssim 5: U^+ = y^+$
  - Zone tampon  
 $5 \lesssim y^+ \lesssim 30 - 40$
  - Zone logarithmique (Spalding, 1974):  
 $y^+ \gtrsim 30 - 40 : U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$

- **Zone externe**

$$\frac{U - U_E}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{y}{\delta} \right) + \frac{2\Pi}{\kappa} \left( \sin^2 \left( \frac{\pi y}{2\delta} \right) - 1 \right)$$

- Les constantes sont (à haut Reynolds)  
 $\kappa \approx 0.41$  ;  $\Pi \approx 0.55$  ;  $C \approx 5$



(tiré de  
P. Chassaing, 2000)

# Turbulence: utile ou nuisible ?

1. Du point de vue de **l'ingénieur**, l'effet principal de la turbulence est **d'augmenter la capacité des fluides à se mélanger, à diffuser**
  - a) Très utile pour les moteurs (avion, voiture) qui ne pourraient pas développer autant de puissance sans la turbulence
  - b) Utile pour éviter les décollements de couches limites et les pertes de portance dans les profils d'aile
  - c) Néfaste pour la traînée visqueuse qui est rendue plus grande par la turbulence: cela induit une augmentation de la consommation car il faut dépenser plus d'énergie pour lutter contre les frottements et les pertes de charges
  
2. Impact globalement positif, tant du point de vue industriel qu'académique et intellectuel ...

# SIMULATION DES ECOULEMENTS TURBULENTS

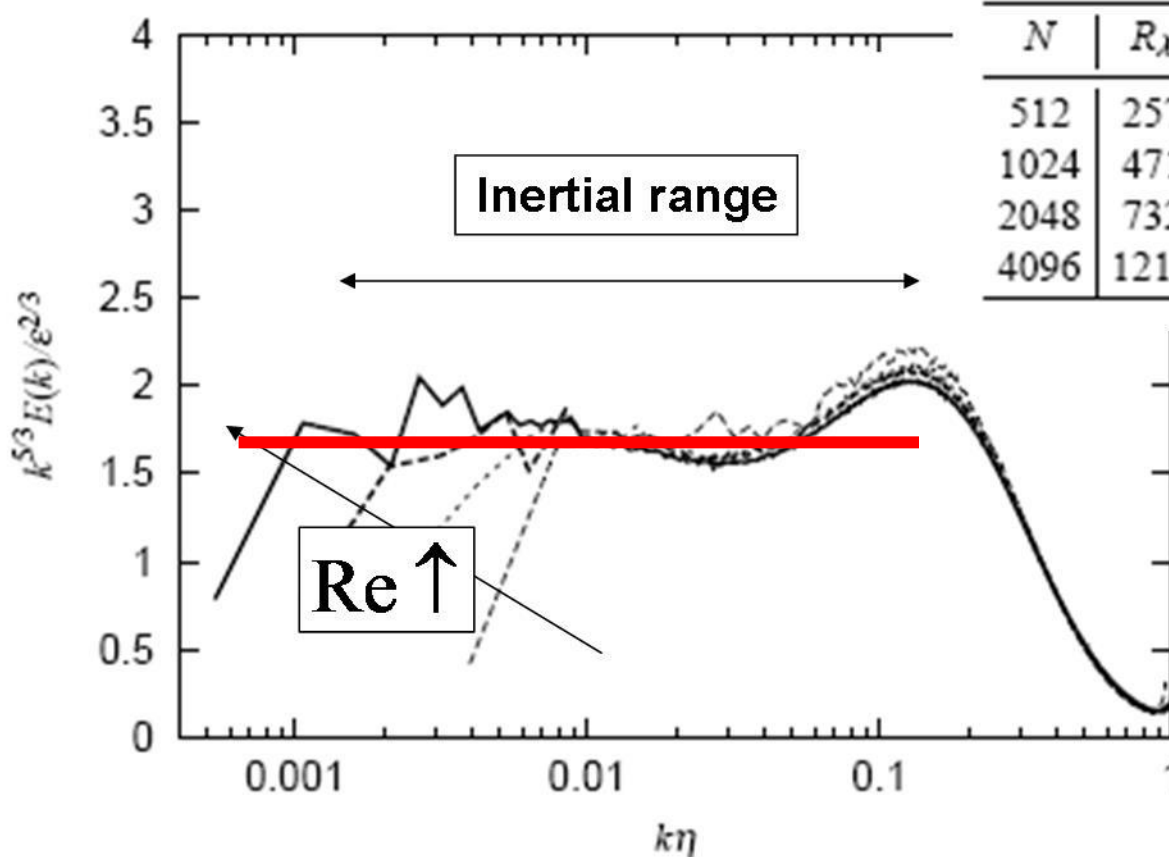
# TURBULENCE ET SIMULATION

- La turbulence est contenue dans les équations de Navier-Stokes
- Donc c'est un phénomène déterministe ...
- **MAIS**: l'écoulement est tellement sensible aux détails (inconnus) des conditions initiales et aux limites que seuls les moments statistiques (moyenne, variance, ...) peuvent être prédits ou comparés
- Une première approche consiste à “simplement résoudre” les équations de Navier-Stokes pour obtenir la turbulence: On parle de **Simulation Numérique Directe - SND**

# SIMULATION NUMERIQUE DIRECTE DES ECOULEMENTS TURBULENTS

- **Etape 1:** Résoudre les équations de Navier-Stokes en prenant en compte toutes les échelles en espace et en temps
- **Etape 2:** Calculer la moyenne, la variance de la solution instationnaire obtenue (rappel: seules les quantités statistiques ont un sens et sont reproductibles). Ces quantités peuvent être utilisés pour comparaison avec des données expérimentales, ou pour analyser l'écoulement
- La limitation principale vient des **ressources informatiques nécessaires:**
  - Le nombre de points est proportionnel à  $\left(R_0^{3/4}\right)^3 = R_0^{9/4}$
  - Le temps de calcul est proportionnel à  $R_0^3$
- Dans beaucoup d'applications,  $R_0 \sim 10^6$  ...

# TURBULENCE HOMOGENE ISOTROPE



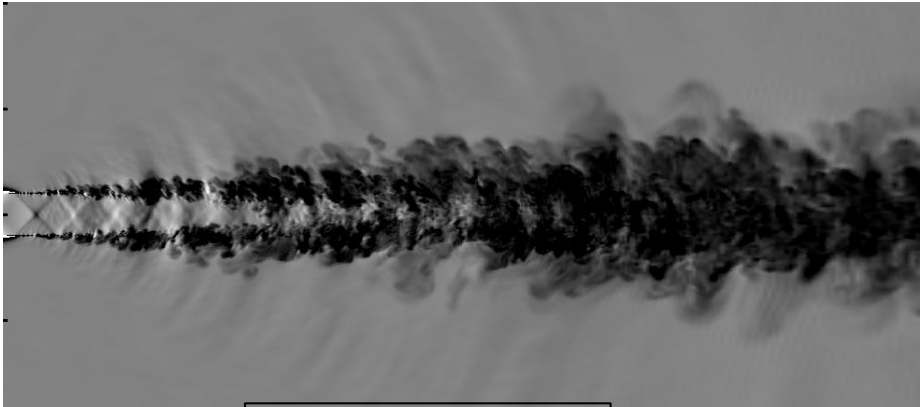
Yokokawa et al.

$N$	$R_\lambda$	$\nu(\times 10^{-4})$	$\Delta t(\times 10^{-4})$	$L$	$\eta$
512	257	2.8	10.0	1.02	0.00395
1024	471	1.1	6.25	1.28	0.00210
2048	732	0.44	4.0	1.23	0.00105
4096	1217	0.173	2.5	1.21	0.00053

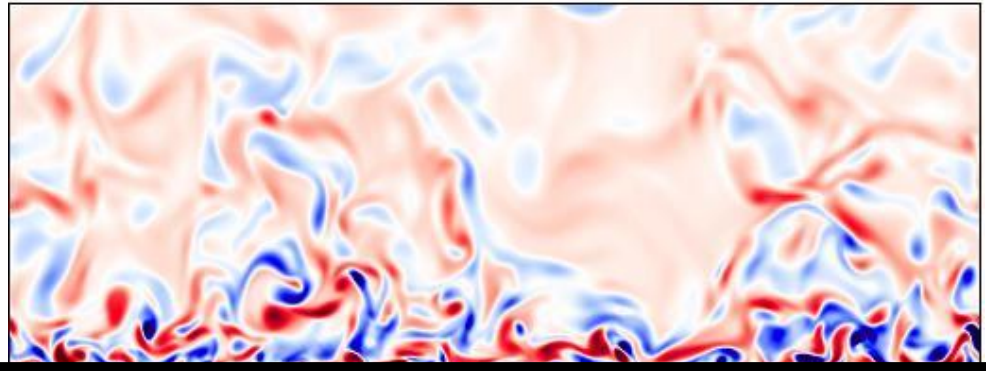
Les SND à Reynolds modéré et dans des configurations simples sont utilisées pour confirmer des résultats théoriques – Ici l'hypothèse de Kolmogorov

$C_K \approx 1.7$

# La SND : alternative à des expériences



Jet compressible



Couche limite (écoulement perpendiculaire au plan). Le champ de vorticité longitudinale illustre le caractère désordonné de l'écoulement.

Les SND sont utilisées principalement dans le monde de la recherche pour leur capacité à fournir une description détaillée de situations turbulentes:

**SND   Reynolds modéré dans des configurations simples à Reynolds modéré**



**Analyse et compréhension des phénomènes physiques pilotant l'écoulement**



**Développement de modèles physiques pour des simulations à échelle 1, haut Reynolds et en géométries complexes.**

# TURBULENCE ET SIMULATION

- La turbulence est contenue dans les équations de Navier-Stokes et l'approche Simulation Numérique Directe vue précédemment est donc parfaitement valide (et utilisée)
- Les **temps de calculs** associés sont cependant **réduisant en ingénierie** et font de la SND un outil amont par excellence
- Les temps de calculs en SND viennent du fait qu'une **très grande variété d'échelles** existe dans les écoulement turbulents
- Une manière d'éviter ce problème est alors **d'éliminer** les fluctuations en **moyennant** les équations



# L'approche RANS

- L'idée est de faire le traitement statistique **AVANT** de résoudre les équations

- Moyenne d'ensemble des équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

- Décomposition de Reynolds:  $u_i = \bar{u}_i + u_i'$

- **Equations de Reynolds :**

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}$$

- Ces équations sont à la base des approches **Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)**

# L'approche RANS

- Il est possible de déterminer une équation de transport pour le tenseur de Reynolds  $-\rho \overline{u_i u_j}$ . Mais elle fait apparaître une corrélation triple  $\overline{u_i u_j u_k}$  ...
- Le tenseur de Reynolds doit donc être modélisé, à l'aide d'un **modèle de turbulence**, c'est-à-dire exprimé à partir des inconnues des équations de Reynolds:  $\overline{u_i}; \overline{p}$
- **C'est le problème de fermeture** qui a été l'objet d'une activité de recherche très intense depuis les années 70.
- **Quelques certitudes aujourd'hui:**
  - **il n'existe pas** de modèle de turbulence optimal
  - les simulations **RANS** sont **faiblement prédictives** mais permettent d'obtenir de bonnes tendances une fois les constantes du modèle de turbulence bien calées

# Hypothèse de Boussinesq

- Les modèles de turbulence les plus évolués consistent en 6 équations de transports pour les 6 composantes du tenseur de Reynolds
- Ces modèles RSM (Reynolds Stress Model) sont généralement peu robustes et chers numériquement (on doit résoudre 10 équations différentielles couplées au lieu de 4 initialement)
- des modèles plus simples sont souvent préférés en pratique; ceux-ci sont basés sur **l'hypothèse de Boussinesq**, utilisant une analogie entre  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  et  $\tau_{ij}$  suggérée par les équations de Reynolds:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}, \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$$

# Viscosité turbulente

- L'hypothèse de Boussinesq permet de simplifier l'effort de fermeture: il suffit de modéliser **la viscosité turbulente  $\mu_t$**  pour connaître l'ensemble du tenseur de Reynolds
- De nombreuses formulations ont été proposées depuis 40 ans
- Les plus simples sont les modèles à zéro équation de transport qui lient explicitement  $\mu_t$  aux quantités moyennes.
- **Ex: modèle de Prandtl**
  - Valable pour les écoulement cisailés simples (couche limite, conduite, ...)
  - Il exprime la viscosité turbulente à l'aide d'une longueur de mélange  $l_m$ :
$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right|$$
  - Toute la difficulté est alors de connaître  $l_m$

# Longueur de mélange

- Cette longueur  $l_m$  a été introduite par mimétisme avec le concept, bien réel celui-là, de libre parcours moyen dans la cinétique des gaz (distance que parcourt une molécule entre deux collisions avec une autre molécule)
- Les expériences montrent qu'il n'existe pas d'expression universelle pour cette échelle de longueur de mélange, indiquant que ce concept n'est pas très représentatif de la turbulence.
- Malgré son manque d'universalité, cette approche a longtemps été utilisée (et l'est encore) en raison de sa simplicité.
- Quelques expressions de  $l_m$  ( $y$  est la distance normale à la paroi):
- Couche limite:
  - Zone interne:  $l_m = \kappa y (1 - e^{-y^+ / 26})$ ,  $\kappa \approx 0.4$  constante de Von Karman
  - zone externe:  $\frac{l_m}{\delta} = 0.085 \tanh\left(\frac{\kappa y}{0.085 \delta}\right)$ ,  $\delta$  épaisseur de la couche limite
- Écoulement en conduite de rayon  $R$ :
  - $\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4$

# Viscosité turbulente

- Le concept de longueur de mélange devient insuffisant pour traiter des géométries complexes
- Des formulations plus générales ont donc été introduites pour modéliser la viscosité turbulente
- Les modèles les plus communs nécessitent la résolution d'équations de transport en plus des équations RANS:
  - Le modèle de Spalart-Allmaras très utilisé en aérodynamique externe contient 1 équation de transport pour une variable directement liée à la viscosité turbulente
  - Les modèles à deux équations de transport sont également assez populaires. Le plus utilisé est le modèle  $k - \varepsilon$

# Equation exacte de k

- L'équation de  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  peut-être obtenue par manipulation des équations de Navier-Stokes
- Elle fait apparaître notamment la dissipation, un terme de diffusion par les fluctuations ainsi que la production d'énergie cinétique, souvent forte au voisinage des parois et qui couple écoulement moyen et fluctuations

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = & \underbrace{- \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_i}}_{\text{puissance des forces de pression associées aux fluctuations}} + \underbrace{- \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_j} / 2}}_{\text{diffusion turbulente}} \\
 + & \underbrace{\mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{diffusion moléculaire}} + \underbrace{- \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{Production}} - \underbrace{\mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j}}_{\text{pseudo-dissipation}}
 \end{aligned}$$

# Modèle k-ε

- k = énergie cinétique de turbulence
- ε : taux de dissipation turbulente

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon$$
$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - \rho C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{production de } k)$$

$$C_\mu = 0.09$$

$$\sigma_k = 1.0$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.3$$

$$C_{1\varepsilon} = 1.44$$

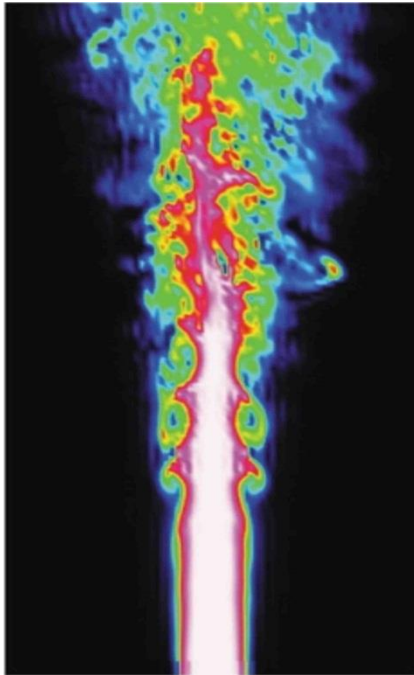
$$C_{2\varepsilon} = 1.92$$



# Calage des constantes

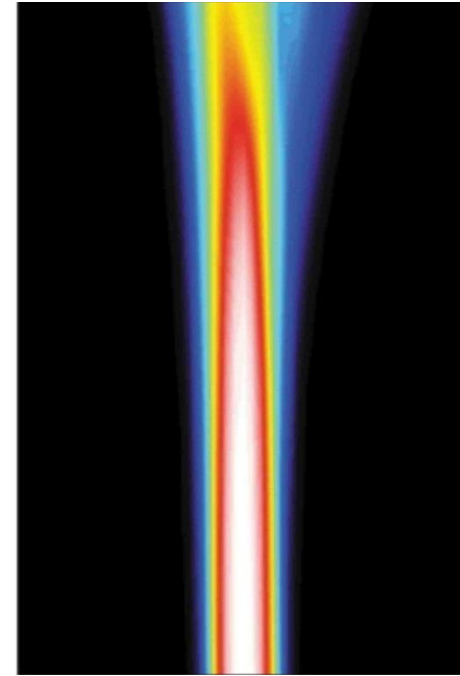
- Les constantes sont fixées de manière à ce que le modèle se comporte bien pour un certain nombre de configurations académiques bien connues. Par exemple:
  1. La valeur de  $C_\mu$  vient du fait que des données expérimentales indiquent que le rapport  $\frac{-\overline{u'v'}}{k}$  vaut environ 0.3 dans la zone d'équilibre  $P_k = \varepsilon$  d'une couche limite turbulente
  2. Le terme en  $C_{2\varepsilon}$  est le seul restant en situation de turbulence homogène isotrope pour laquelle les données indiquent une loi de décroissance du type  $k \propto t^{-n}$  avec n entre 1 et 1.25. Or on peut montrer que  $C_{2\varepsilon} = (n + 1)/n$  dans cette situation, ce qui conduit à  $C_{2\varepsilon}$  entre 1.8 et 2. La valeur préconisée de 1.92 est issue d'optimisations numériques.
- **ATTENTION**: Rien ne garantit que les constantes ainsi calées conduisent à de bons résultats pour d'autres situations d'écoulement. C'est l'origine du **manque d'universalité** des modèles de turbulence

# SND vs RANS: exemple d'un jet chaud



**SND**

La simulation fournit l'ensemble des fluctuations associées à l'écoulement, sous la seule hypothèse des équations de Navier-Stokes. Les résultats doivent être moyennés a posteriori afin d'être analysés ou comparés à des données expérimentales

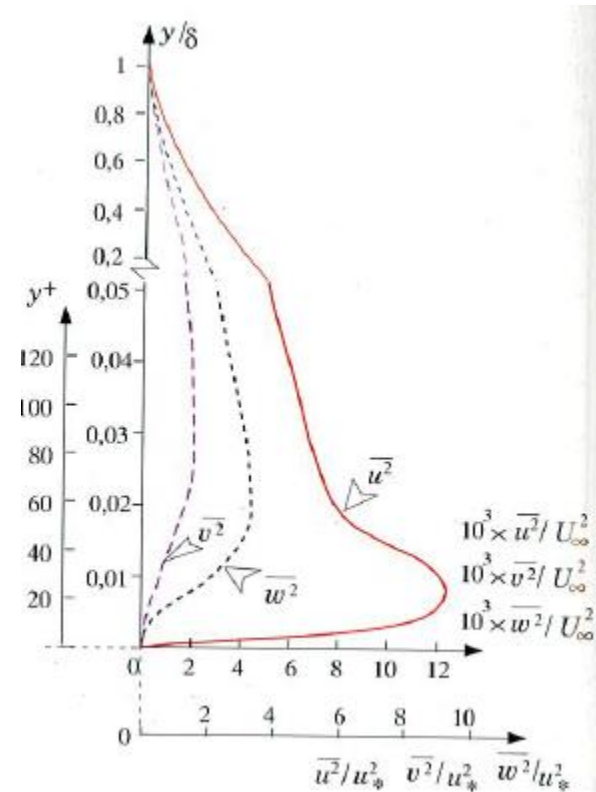
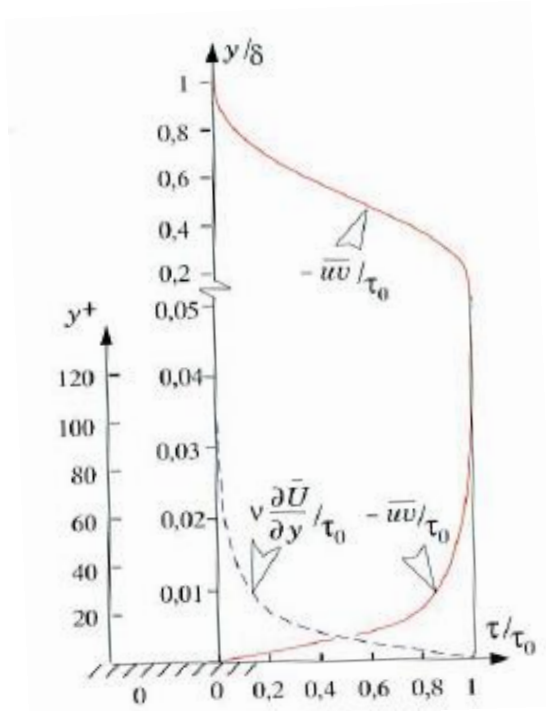


**RANS**

Seul l'écoulement moyen est calculé, sous certaines hypothèses de modélisation. Le mélange, lié aux fluctuations grandes échelles, est souvent mal prédit

# Ecoulement turbulent pariétal

- Les fluctuations turbulentes sont nécessairement nulles au niveau de la paroi
- Elles varient fortement dans la zone pariétale, le maximum étant atteint dans la zone tampon
- Le frottement total est constant:  $\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \approx \tau_w$

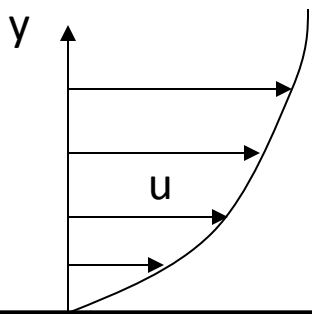


# Ecoulement turbulent pariétal

- Les échelles de vitesse et de longueur sont basées sur le frottement pariétal  $\tau_w$  :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad l = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- En l'absence de décollement, il existe une zone inertielle en laquelle une loi universelle est vérifiée par la vitesse moyenne



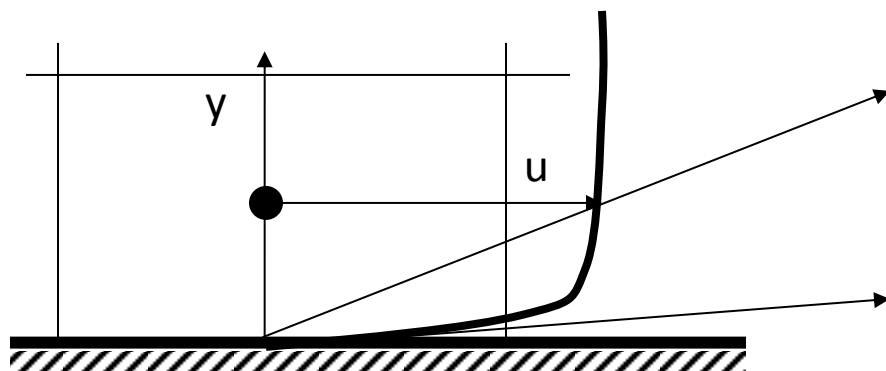
$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C, \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

$\kappa$  : Von Karman constant,  $\kappa \approx 0.4$

$C$  : "Universal constant",  $C \approx 5.2$

# Modélisation de paroi

- Représenter correctement les variations du profil de vitesse nécessite de disposer d'au moins 2 ou 3 points de maillage dans la sous-couche visqueuse
- L'épaisseur de cette couche est de l'ordre de  $5\nu/u_\tau$ , inversement proportionnel au nombre de Reynolds
- **Approche haut-Reynolds:** on utilise un maillage grossier ( $\Delta y^+ \approx 100$ ) et on utilise la loi log pour estimer le frottement pariétal à partir de la vitesse à la première maille
- **Approche bas-Reynolds:** on utilise un maillage très fin ( $\Delta y^+ \approx 1$ ) et un modèle de turbulence adapté (fonctions d'amortissement)



Gradient de vitesse estimé par un maillage grossier

Gradient de vitesse exact à la paroi

# Modèle bas-Reynolds de Spalart-Allmaras

- C'est un modèle à 1 équation de transport dont la forme a été ajustée de manière à fournir le meilleur comportement possible en situation de type aérodynamique externe

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) + c_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2] - c_{w1} f_w \left[ \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{d}} \right]^2.$$

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 \tilde{d}^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

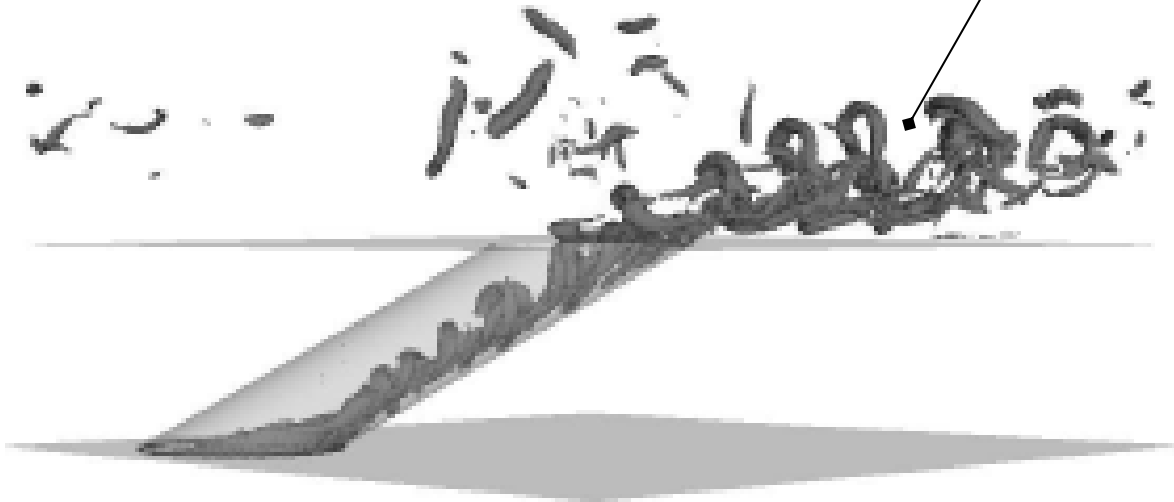
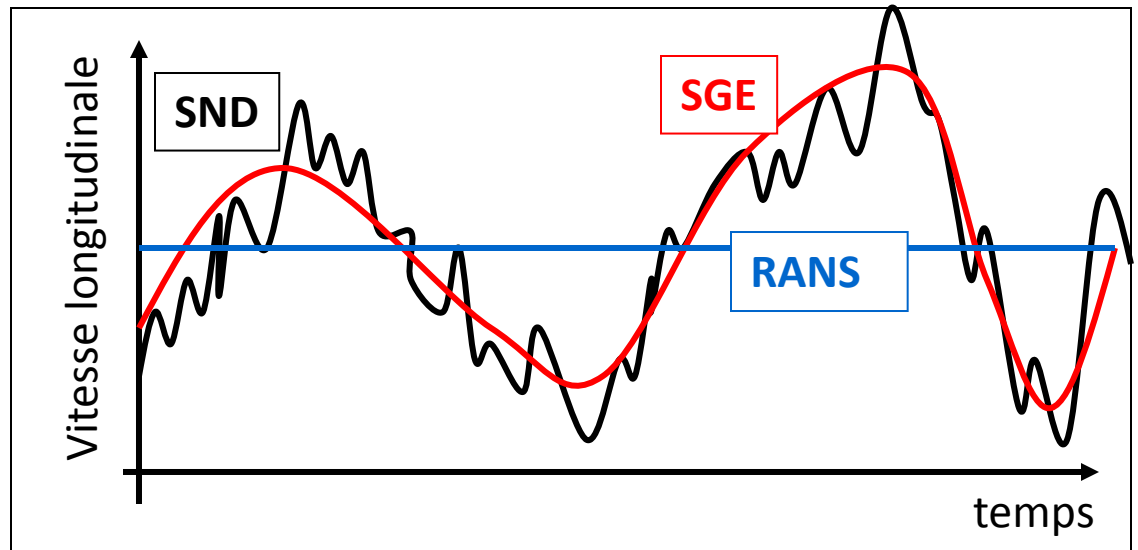
$$f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 \tilde{d}^2}$$

$$c_{b1} = 0.1355, \quad \sigma = 2/3, \quad c_{b2} = 0.622, \quad \kappa = 0.41, \\ c_{w1} = c_{b1} / \kappa^2 + (1 + c_{b2}) / \sigma, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad c_{v1} = 7.1.$$

# RANS – SGE - SND

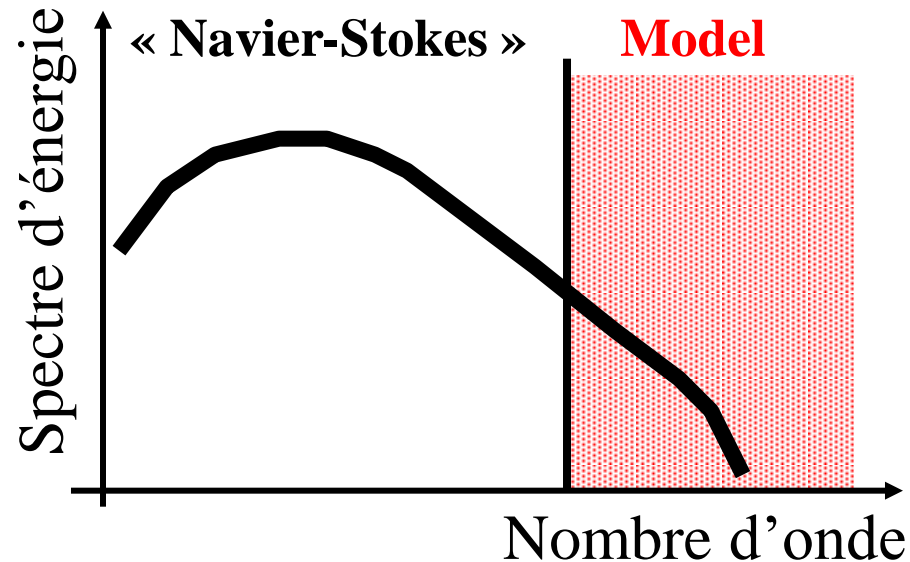
- **Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS):**
  - Utilise un modèle pour prendre en compte les effets de la turbulence
  - **Rapide mais peu ou pas prédictif**
- **Simulation Numérique Directe (SND):**
  - Pas de modèle à part Navier-Stokes
  - **Prédictif mais pas applicable à des situations pratiques**
- **Simulation aux Grandes Echelles (SGE):**
  - Utilise un modèle pour les échelles les plus petites uniquement (assez universelles),
  - On résout Navier-Stokes (filtré) pour obtenir l'évolution des plus grandes échelles (assez dépendantes du cas considéré)
  - **Prédictif et applicable pour des cas complexes**

# RANS – SGE - SND





# Large Eddy Simulation – Simulation aux Grandes Echelles



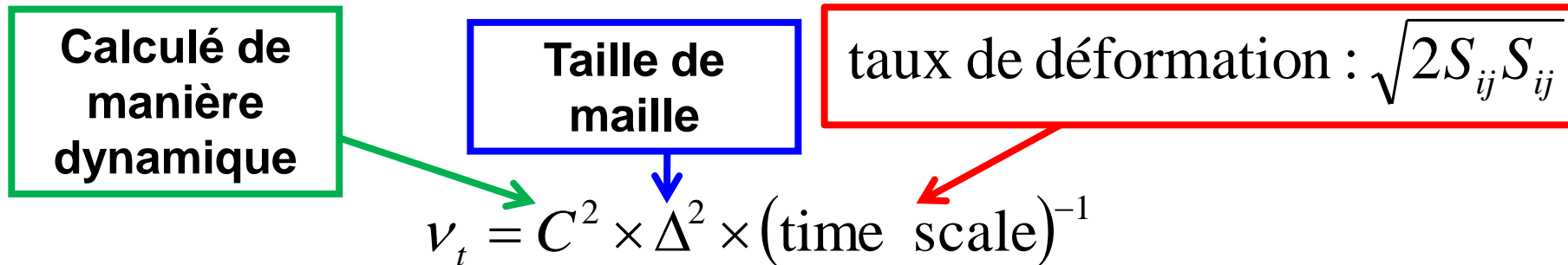
- **Formellement:** on remplace l'opérateur de moyenne d'ensemble du RANS par un filtrage spatial pour obtenir les équations de la SGE

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \iiint_{R^3} \phi(\xi, t) G(\mathbf{x} - \xi) d^3\xi = G * \phi$$

# Modèles pratiques pour la prise en compte des petites échelles

1. Des formulations de type viscosité turbulente sont souvent utilisées
2. Le modèle de **Smagorinsky (1963) dynamique** (Germano et al. 1991) est souvent considéré comme le meilleur compromis

simplicité/précision



3. D'autres formulations émergent depuis quelques années: Vreman 2004, WALE (Nicoud & Ducros 1999), Sigma (Nicoud et al. 2011), ...